S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.633
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 65M12

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

А.К. БАЗЗАЕВ

Abstract. Рассматривается третья краевая задача для уравнения влагопереноса с нелокальным источником в p - мерном параллелепипеде. Для рассматриваемой задачи построены локально-одномерные разностные схемы (ЛОС). Получена априорная оценка для решения ЛОС и доказана ее сходимость.

Keywords: уравнение влагопереноса, нелокальная краевая задача, краевые условия третьего рода, локально - одномерная схема, сходимость разностной схемы, аппроксимация, априорная оценка.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование моделей процессов переноса в различных природных системах представляет одно из быстро развивающихся направлений современной математики. Повышенный интерес к данной проблеме объясняется тем, что процессы переноса имеют самое широкое распространение в природе и технике. Теория процессов переноса опирается в своих исследованиях на ряд основополагающих аксиом классической термодинамики необратимых процессов. Однако некоторые из них накладывают серьезные ограничения на область применения этой теории. Процессы переноса по своей сути нелокальны и имеют место в системах, которые, строго говоря, не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Bazaev, A.K., A locally one-dimensional scheme for the moisture transfer equation with a nonlocal source.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2023-939.

Поступила 22 января 2024 г.

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью. Нелокальные краевые задачи возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почво - грунтах, распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по - видимому, работы Камынина Л.И. [1] и Чудновского А.Ф. [2]. После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [3] внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных краевых задач изучались в работах Ионкина Н.И. [4], [5], Ильина В.А., Моисеева Е.И. [6], Ионкина Н.И., Моисеева Е.И. [7], Гордезиани Д.Г. [8], Нахушева А.М. [9], Солдатова А.П., Шханукова М.Х. [10] и др.

Уравнение влагопереноса играет важную роль во многих областях науки и вызывает большой практический и теоретический интерес. В 1965 году это уравнение было получено известным теплофизиком А.В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов для плотности потока влаги в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры. В биологии оно характеризует поток биомассы микробной популяции в биологическом реакторе. Еще раньше уравнению влагопереноса были посвящены работы А.В. Бицадзе, К. И. Карапетяна.

Чудновский А.Ф. в работе [2] обратил внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ 0 < x < \ell,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

где $D(w)$ – коэффициент диффузивности, w – влажность в долях единицы, x – глубина.

Для уравнения (1) Чудновский А.Ф. сформулировал задачу с нелокальным условием:

$$D\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = \int\limits_0^\alpha w dx, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, \tag{3}$$

$$w(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{4}$$

Нелокальное условие (2) означает, что поток влаги через поверхность $x = 0$ равен содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до α, условие (3) означает изоляцию в смысле обмена влагой между слоем почвы $x = \ell$ и ее нижними слоями, и в начальный момент задан глубинный ход влажности (4).

Из физических соображений условия интегрального вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины [2]. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы, при изучении движения почвенной влаги в капиллярно-пористых средах. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики, указал в своей обзорной статье А.А. Самарский [11] и привел постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

В работе [14] рассмотрена нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа в p - мерном параллелепипеде, для которой строятся локально-одномерные разностные схемы. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной разностной схемы и доказана ее сходимость.

Локально-одномерным схемам для нелокальных краевых задач для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида посвящены работы [12], [13].

1. Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G\times[0 < t \leqslant T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{7}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u + \int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |q_\alpha|,\ |\beta_{\pm\alpha}| \leqslant c_2,\ \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные.

2. Локально-одномерная разностная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \ell_\alpha/N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha},\ \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha,\ i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ \quad h_\alpha/2,\ i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases}$$

$\gamma_{-\alpha}$ – левый граничный узел $x_\alpha = 0$, $\gamma_{+\alpha}$ – правый граничный узел $x_\alpha = \ell_\alpha$.

На отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau;\ j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha/p\ \tau,\ \alpha = 1, 2, \dots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}\right]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Уравнение (5) перепишем в виде

$$\mathscr{P}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathscr{P}_\alpha u = 0,\ \mathscr{P}_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, и удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$ будем последовательно решать задачи

$$\mathscr{P}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0,\ x \in G,\ t \in \Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

$$\begin{cases} k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{9}$$

полагая при этом (см. [15], с. 522)

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x,0) = u_0(x), \\ v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j),\ j = 1, 2, \ldots, \\ v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}),\ \alpha = 2, 3, \ldots, p. \end{gathered} \tag{10}$$

Аппроксимируя каждое уравнение (8) номера α на полуинтервале Δ_α двухслойной неявной схемой и, применяя известный прием повышения точности аппроксимации до второго порядка по h (см. [15] с. 166), [16] краевых условий третьего рода, приходим к цепочке одномерных разностных схем

$$y_{\bar t}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p},\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,\ x \in \overline{\omega}_{h_\alpha}, \tag{11}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{12}$$

где

$$y_{\bar t}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau},$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar x_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} y_0}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\dfrac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar x_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} y_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \widetilde{\mu}_{-\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \widetilde{\mu}_{+\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\overline{\beta}_{-\alpha} = \beta_{-\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,0}, \quad \overline{\beta}_{+\alpha} = \beta_{+\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,N_\alpha},$$
$$\widetilde{\mu}_{-\alpha} = \frac{\overline{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \overline{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0},$$
$$\widetilde{\mu}_{+\alpha} = \frac{\overline{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \overline{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha},$$
$$y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}.$$

3. Погрешность аппроксимации ЛОС

Пусть $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где u – решение исходной задачи (5) – (7). Тогда, подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ в разностное уравнения (11), получим
$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\alpha/p} + \Psi_\alpha^{j+\alpha/p},$$
где
$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$
Обозначив через
$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$$
и замечая, что
$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0,$$
если $f = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha$, представим погрешность в виде суммы
$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha.$$

$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha - \overset{\circ}{\Psi}_\alpha =$$
$$= \left(\Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}\right) -$$
$$- \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right) + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha,$$
где
$$\overset{*}{\Psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}\right) - \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right).$$

Очевидно, что
$$\overset{*}{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau), \ \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1),$$
$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p} \overset{*}{\Psi}_\alpha = O\left(h_\alpha^2 + \tau\right).$$

Запишем граничное условие при $x_\alpha = 0$ в виде:
$$0.5h_\alpha y_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \overline{\beta}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \hbar_\alpha + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \tag{13}$$

Подставляя $y^{(\alpha)} = z^{(\alpha)} + u^{(\alpha)}$ в (13), получим

$$0.5h_\alpha z^{(\alpha)}_{\overline{t},0} = a^{(1_\alpha)} z^{(\alpha)}_{x_\alpha,0} - \beta_{-\alpha} z^{(\alpha)}_0 - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} z^{(\alpha)}_0 + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z^{(\alpha)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u^{(\alpha)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha -$$

(14) $$-\beta_{-\alpha} u^{(\alpha)}_0 - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u^{(\alpha)}_0 - 0.5h_\alpha u^{(\alpha)}_{\overline{t},0} + a^{(1_\alpha)}_\alpha u^{(\alpha)}_{x_\alpha,0} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}.$$

К правой части полученного выражения (14) добавим и вычтем

$$0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha u + \int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{j+1/2}_{x_\alpha=0}.$$

Тогда получим

$$\Psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left(f_{\alpha,0} - u^{(\alpha)}_{\overline{t}}\right) + a^{(1_\alpha)}_\alpha u^{(\alpha)}_{x_\alpha,0} - \beta_{-\alpha} u^{(\alpha)}_0 - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u^{(\alpha)}_0 + \mu_{-\alpha} -$$

$$-\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u^{(\alpha)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha - 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha u + \int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]^{j+1/2}_{x_\alpha=0} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} =$$

$$= \left[k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \beta_{-\alpha} u_0 + \mu_{-\alpha}\right]^{j+\alpha/p}_{x_\alpha=0} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + O(h^2_\alpha + \tau) =$$

$$= 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha},\ \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} = O(h^2_\alpha + \tau).$$

Итак,

$$0.5h_\alpha z^{(\alpha)}_{\overline{t},0} = a^{(1_\alpha)}_\alpha z^{(\alpha)}_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} z^{(\alpha)}_0 + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z^{(0)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha},$$

или

$$z^{(\alpha)}_{\overline{t},0} = \Lambda^-_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_{-\alpha},\ \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Аналогично при $x_\alpha = \ell_\alpha$ получаем

$$z^{(\alpha)}_{\overline{t},N_\alpha} = \Lambda^+_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_{+\alpha},\ \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Окончательно, задача для погрешности $z^{j+\alpha/p} = z^{(\alpha)}$ имеет вид

(15) $$z^{(\alpha)}_{\overline{t}} = \overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi^{j+\alpha/p}_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,\ z(x, 0) = 0,$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha z = \begin{cases} \Lambda_\alpha z = (a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha z + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda^-_\alpha z = \dfrac{a^{(1_\alpha)}_\alpha z_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} z_0}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda^+_\alpha z = -\dfrac{a^{(N_\alpha)}_\alpha z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} z_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha = \begin{cases} \Psi_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha, \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0, \ \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1), \ \overset{*}{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau), \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \dfrac{\overset{*}{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = 0, \ \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau), \ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \dfrac{\overset{*}{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}, \ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} = 0, \ \overset{*}{\Psi}_{+\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau), \ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

4. Устойчивость ЛОС

Так как для нелокальных краевых задач не установлен принцип максимума, то априорные оценки будем получать с помощью метода энергетических неравенств. Умножим уравнение (11) скалярно на $y^{j+\alpha/p} = y^{(\alpha)}$:

(16) $$[y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] - [\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}], \ \Phi^{(\alpha)} = \Phi^{j+\alpha/p},$$

где

$$[u,v] = \sum_{x\in\overline{\omega}_h} uvH, \ H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha, \ [u,v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, \ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, \ i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

Преобразуем каждую сумму тождества (16):

(17) $$\left[y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] = \frac{1}{2}\left(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2}\|y_{\bar{t}}^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)},$$

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha =$$

(18)

$$= -\left(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha - \left[d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \hbar_\alpha, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \beta_{-\alpha}\left(y_0^{(\alpha)}\right)^2 - \beta_{+\alpha}\left(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2,$$

(19) $$\left[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}.$$

Просуммируем (18), (19) по всем $i_\beta \neq i_\alpha, \ \beta = 1, 2, \ldots, p$, тогда получим

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha\right) H/\hbar_\alpha =$$

$$= -\sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left\{ \left(a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha + \left[d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)} \hbar_\alpha, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \right.$$

(20) $$\left. + \beta_{-\alpha}\left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0}\right)^2 + \beta_{+\alpha}\left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2 \right\} H/\hbar_\alpha,$$

(21) $$\left[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=N_\alpha}\right) H/\hbar_\alpha.$$

Подставляя (17), (20), (21) в тождество (16), получаем

$$\frac{1}{2}\left(\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\right)_{\bar{t}} + c_0\|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] +$$

$$+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0}+\mu_{+\alpha}y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)H/\hbar_\alpha-\left[d_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]+$$

$$+\left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha}y^{(\alpha)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha,y^{(\alpha)}\right]-\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\beta_{-\alpha}\left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0}\right)^2+\beta_{+\alpha}\left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2\right)H/\hbar_\alpha. \tag{22}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (22):

$$\left[\varphi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]\leqslant\frac{1}{2}\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\frac{1}{2}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}. \tag{23}$$

На основании леммы 1 из [17] имеем

$$\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0}+\mu_{+\alpha}y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\varepsilon\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)}+\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\right)H/\hbar_\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha+\varepsilon\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{24}$$

$$-\left[d_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]\leqslant c_2\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{25}$$

$$\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\beta_{-\alpha}\left(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=0}\right)^2+\beta_{+\alpha}\left(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2\right)H/\hbar_\alpha\leqslant$$

$$\leqslant 2c_2\varepsilon\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+2c_2\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{26}$$

$$\left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha}y^{(\alpha)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha,y^{(\alpha)}\right]\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{\ell_\alpha}{2}\right]\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{27}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

Подставляя (23) – (27) в (22) при $\varepsilon=c_0/(3+4c_2)$, находим

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+c_0\tau\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant\|y^{j+(\alpha-1)/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+$$

$$+\tau\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+c(\varepsilon)\tau\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+$$

$$+\tau\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha. \tag{28}$$

Просуммируем (28) сначала по $\alpha=1,2,\ldots,p$:

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+c_0\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant\|y^j\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau c(\varepsilon)\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+$$

$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha,$$

а затем по j' от 0 до j:

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c_0 \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y^{j'+\alpha/p}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant$$

$$\leqslant \|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} +$$

$$+ \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right) H/\hbar_\alpha. \tag{29}$$

Из (29) имеем

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + F^j, \tag{30}$$

где

$$F^j = \|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} +$$

$$+ \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right) H/\hbar_\alpha.$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \nu_2 F^j, \tag{31}$$

где $\nu_1,\ \nu_2$ – известные положительные постоянные.

Возвращаясь к неравенству (28), записываем

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \|y^{j+(\alpha-1)/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c(\varepsilon)\tau \|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} +$$

$$+\tau \|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \tau \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_j) + \mu^2_{+\alpha}(t_j)\right) H/\hbar_\alpha. \tag{32}$$

Просуммируем (32) по α' от 1 до α, тогда получим

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \|y^j\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c(\varepsilon)\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} +$$

$$+\tau \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_j) + \mu^2_{+\alpha}(t_j)\right) H/\hbar_\alpha \Big). \tag{33}$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1 \leqslant \alpha' \leqslant p} \|y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} = \|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)},$$

в противном случае (32) будем суммировать до такого α, при котором $\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}$ достигает максимального значения при фиксированном j. Тогда (33) перепишем в виде

$$\max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \|y^j\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + pc(\varepsilon)\tau \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant p} \|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} +$$

$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha\Big). \tag{34}$$

Так как из (30)

$$\|y^j\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant pc(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{j-1}\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+F^j,$$

то при малом $\tau<\tau_0=\dfrac{1}{2pc(\varepsilon)}$ получим (31).

Введя обозначение $g_{i+1}=\max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}$, соотношение (31) можно переписать в виде

$$g_{i+1}\leqslant\nu_1\sum_{k=1}^{j}\tau g_k+\nu_2F^j. \tag{35}$$

С помощью неравенства (35) на основании леммы 4 из ([18], с. 171) из неравенства (29) получим априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant$$

$$\leqslant M(t)\left[\|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha\Big)\right], \tag{36}$$

где $M(t)>0$ – не зависит от h_α и τ.

Итак, справедлива

Теорема 1. *1 Локально-одномерная схема (11) – (12) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (11) – (12) справедлива оценка (36).*

5. Равномерная сходимость ЛОС

По аналогии с ([15], с. 493) представим решение задачи (15) в виде суммы

$$z_{(\alpha)}=v_{(\alpha)}+\eta_{(\alpha)},\ z_{(\alpha)}=z^{j+\alpha/p},$$

где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau}=\overset{\circ}{\Psi}_\alpha,\ x\in\omega_h+\gamma_{h,\alpha},\ \alpha=1,2,\dots,p,\ \eta(x,0)=0, \tag{37}$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha=\begin{cases}\overset{\circ}{\Psi}_\alpha,\ x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha},\ x_\alpha\in\gamma_{-\alpha},\\ \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha},\ x_\alpha\in\gamma_{+\alpha}.\end{cases}$$

Отсюда находим $\eta^{j+1}=\eta_{(p)}=\eta^j+\tau(\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p)=\eta^j=\ldots=\eta^0=0$. Тогда для $\eta_{(\alpha)}$ имеем $\eta_{(\alpha)}=\tau(\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_\alpha)=-\tau(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1}+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p)=O(\tau)$.

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)}-v_{(\alpha-1)}}{\tau}=\Lambda_\alpha v_{(\alpha)}+\widetilde{\Psi}_\alpha,\ x\in\omega_{h_\alpha},\ \alpha=1,2,\dots,p, \tag{38}$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- v_{(\alpha)} + \frac{\widetilde{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \tag{39}$$

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ v_{(\alpha)} + \frac{\widetilde{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \tag{40}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{41}$$

$$\widetilde{\Psi}_\alpha = \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_\alpha,$$

$$\widetilde{\Psi}_{-\alpha} = \Lambda_\alpha^- \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} - \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \eta_{(\alpha)i_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\widetilde{\Psi}_{+\alpha} = \Lambda_\alpha^+ \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{+\alpha}.$$

Так как в силу (37)

$$\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha \left(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+2} + \ldots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = O(\tau),$$

$$\Lambda_\alpha^- \eta_{(\alpha)} = \Lambda_\alpha^+ \eta_{(\alpha)} = O(\tau),$$

то

$$\widetilde{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau),\ \widetilde{\Psi}_{\pm\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau).$$

Решение задачи (38) – (41) оценим с помощью теоремы 1:

$$\|v_{(\alpha)}^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|v_{(\alpha)\overline{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\,]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant M(t) \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\widetilde{\Psi}_\alpha^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\widetilde{\Psi}_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \widetilde{\Psi}_{+\alpha}^2(t_{j'}) \right) H/\hbar_\alpha \right). \tag{42}$$

Так как

$$\eta^j = 0,\ \eta_{(\alpha)} = O(\tau),\ \|z^j\| \leqslant \|v^j\|,$$

то из оценки (42) следует

Теорема 2. *2Пусть задача (5) – (7) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,\ \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (11) – (12) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 \leqslant M\left(|h|^2 + \tau\right),$$

$$\|y^{j+1}\|_1^2 = \|y^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y_{\overline{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\,]|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2.$$

Для решения сеточных уравнений, получающихся при разностной аппроксимации нелокальных краевых задач, следует использовать метод окаймления ([19], с.187).

References

[1] *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1006 – 1023.

[2] *Чудновский А.Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло - и влагопереноса в почве // «Сб. трудов по агрофизике», вып. 23, Гидрометеоиздат, 1969. С. 41 – 54.

[3] *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т.185. №4. С. 739 – 740.

[4] *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальным условием // Дифференц. ур - ия. 1977, Т.13, №2. С. 294 – 304.

[5] *Ионкин Н. И.* О равномерной сходимости разностной схемы для одной нестационарной нелокальной краевой задачи // Актуальные вопросы прикладной математики. Изд - во МГУ. 1989, С. 240.

[6] *Ильин В.А.,Моисеев Е.И.* Нелокальная задача для оператора Штурма - Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // ДАН СССР. 1986. Т.291. №3. С. 534 – 539.

[7] *Ионкин Н. И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. ур - ия. 1979, Т.15, №7. С. 1284 – 1295.

[8] *Гордезиани Д.Г.* О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. // Препринт института прикладной математики при ТГУ. – Тбилиси. 1981.

[9] *Нахушев А.М.* Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги. // ДАН СССР. 1978. Т.242. №5. С. 1008 – 1011.

[10] *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка. // ДАН СССР. 1987. Т.297. №3. С. 547 – 552.

[11] А.А. Самарский, О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, 16:11 (1980), 1925 — 1935.

[12] З. В. Бештокова, Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида с нелокальным источником, Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 2017, №3, 5 — 12.

[13] З. В. Бештокова, Конечно-разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида, Дальневост. матем. журн., 22:1 (2022), 3–27

[14] А. К. Баззаев, Д. К. Гутнова, М. Х. Шхануков-Лафишев, Локально-одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным условием, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52:6 (2012), 1048 — 1057.

[15] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука. 1983. – 616 с.

[16] *Фрязинов И.В.* О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1106 – 1112.

[17] *Андреев В.Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений. // ЖВМ и МФ. 1968. Т.8. №6. С. 1218 – 1231.

[18] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука. 1973. – 415 с.

[19] *Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз. 1960. – 656 с.

Alexander K. Bazzaev
1) North Ossetian State University after K.L. Khetagurov,
Vatutina str. 44 — 46,
362025, North Ossetia - Alania, Vladikavkaz, Russia,
2) Vladikavkaz Institute of Management,
Borodinskaya str. 14,
362025, North Ossetia - Alania, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: a.k.bazzaev@yandex.ru