

МЕТОДЫ С АДАПТИВНОЙ ОБЛАСТЬЮ
УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ
ФРАКТАЛЬНЫХ ЛИНИЙ РАЗРЫВАА.Л. АГЕЕВ , Т.В. АНТОНОВА *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

Abstract: We consider the ill-posed problem of localizing (determining the position) of discontinuity lines for a function of two variables that is smooth outside the discontinuity lines and experiencing a discontinuity of the first kind at each point on the lines. It is assumed that the exact function is unknown, but information about the perturbed function is known. The error is as follows that the problem is ill-posed. A new class of regularizing methods with an adaptive averaging domain is constructed. A correctness class is introduced, on which the problem is studied (in particular, localization accuracy estimates are obtained). The considered class of correctness contains, among other things, fractal break lines, the consideration of which is important since in images the boundaries of natural objects are usually of a fractal nature. A geometric fractal with a large Hausdorff dimension is constructed, for which it is possible to check all the conditions on lines.

Keywords: ill-posed problems, regularization method, discontinuity line, global localization, discretization, Lipschitz condition, fractal, Hausdorff dimension.

1 Введение

Границы объектов на изображении часто являются линиями, на которых функция двух переменных f (изображение) терпит разрыв первого рода (линии разрыва); вне линий разрыва функцию можно считать гладкой. Рассматривается задача локализации (определения положения) линий разрыва функции двух переменных в случае, когда вместо точной функции f известна информация о функции $f^\delta : \|f^\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$, $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$; уровень возмущения δ считается известным. Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения функции f^δ на квадрате со стороной τ . Для аппроксимации линий разрыва при возмущениях рассматриваемого типа необходимо строить регуляризирующие алгоритмы [1, 2, 3], поскольку данная задача является некорректно поставленной.

В [4, 5] можно найти различные методы, позволяющие локализовать линии разрыва зашумленной функции двух переменных, их численную реализацию и ссылки на литературу (см. также [6, гл.10]). В российских и зарубежных научных журналах за последние годы этой тематике посвящено много работ. Например, в [7], используя совместно усреднения с помощью маски и медианные фильтры, строятся фильтры, рассчитанные на локализацию линий разрыва в условиях импульсных шумов. Локализация линий разрыва также входит в качестве блока в [8] при сглаживании изображений, сохраняющих структуру. Насколько известно авторам, первые теоретические результаты по этой тематике (оценки точности аппроксимации и других характеристик алгоритмов) были получены в [9, 10] (см. также [11], где изучались вопросы дискретизации). Глобальный теоретический анализ алгоритмов локализации кусочно-линейных линий разрыва, по-видимому, впервые проведен в [12].

Один из основных подходов при построении методов локализации основан на усреднении возмущенной функции f^δ . При этом усреднения сдвигаются по осям координат (иногда используется еще поворот области усреднения). В настоящей работе строятся методы также основанные на идее усреднения, но области усреднения будут зависеть не только от сдвигов по осям, но и от уровня шума δ . Такие алгоритмы авторы предлагают называть адаптивными методами локализации.

Поскольку границы некоторых естественных объектов на изображении часто не могут быть описаны гладкими линиями (возможно линии имеют фрактальный характер), то для локализации таких границ нужно вводить классы линий, включающие фракталы, и обосновывать работоспособность алгоритмов аппроксимации линий разрыва на этих классах. В [13] был построен класс функций, включающий функции с фрактальными линиями разрыва, и разработана методика оценки точности локализации таких линий разрыва. При этом построенный в [13] пример фрактальной линии имел очень маленькую фрактальную размерность, что свидетельствует о достаточно жестких условиях на линии разрыва

(узком классе корректности), гарантирующих работоспособность метода. Замена условия гладкости [13] на условие липшицевости [14] позволило в [15] расширить класс корректности. В настоящей работе за счет построения новых методов с адаптивной областью усреднения удалось получить оценки на более широком классе корректности. За счет введения большего числа усреднений (добавлены усреднения еще по двум направлениям) удалось улучшить оценки точности локализации линии разрыва точками, которые гарантированно находятся алгоритмом.

Для ответа на вопрос: насколько существенно новые алгоритмы, построенные в настоящей работе, лучше, чем алгоритмы из работы [15] используется подход, развитый в [15], где было построено однопараметрическое семейство геометрических фракталов. В настоящей работе найдена фрактальная линия из семейства фракталов, построенного в [15], которая удовлетворяет условиям настоящей работы, и при этом имеет существенно большую фрактальную размерность, чем линии из работ [13, 15].

В пункте 1 настоящей работы вводится класс линий разрыва, включающий фрактальные линии, строится и изучается последовательность геометрических фракталов, приводится пример конкретного фрактала. В пункте 2 конструируется класс корректности, содержащий в том числе функции с фрактальной линией разрыва из пункта 1, приводится постановка задачи локализации и вводятся непрерывные и дискретные вспомогательные функции. В пункте 3 доказываются предварительные оценки. В пункте 4 конструируются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации, доказываются основная теорема и проверяется выполнение условий теоремы для конкретного фрактала из пункта 1.

2 Условия на линии разрыва. Однопараметрическая система фракталов

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ в квадрате $\mathfrak{D} = \{(x, y) : |x| \leq d, |y| \leq d\}$, $d > 0$, имеет одну замкнутую линию разрыва Γ ; вне этой линии функция f гладкая (точные условия на f выписаны ниже). Для удобства будем предполагать, что функция f вне квадрата \mathfrak{D} равна нулю и не имеет скачка на границе \mathfrak{D} (это условие не принципиально и может быть снято; также можно рассмотреть несколько линий разрыва).

В настоящей работе в качестве тестов используются самоподобные геометрические фракталы [16, гл. 2]. Семейство специальных фракталов, для которых можно проверить все условия, рассматривалось в работе [15].

Фрактальную линию Γ мы будем получать как предел последовательности замкнутых ломаных Γ_n без точек самопересечения. В этом случае фрактальная кривая Γ будет замкнутой несамопересекающейся линией, которая делит плоскость на связные части. Эти условия не принципиальны и сформулированы в работе для упрощения выкладок.

В начале пункта введем условия на линию Γ . Начнем с введения последовательности масштабов.

Определение 1. Пусть заданы положительные вещественные числа \bar{q} , ν . Последовательность положительных чисел $\mathbf{q}[\nu, \bar{q}] = \{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ будем называть регулярной последовательностью масштабов, если $\lim_{s \rightarrow \infty} q_s = 0$, $q_1 \leq \bar{q}$ и для всех $s \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $0 < \nu \leq q_{s+1}/q_s < 1$.

Рассмотрим последовательность замкнутых ломаных Γ_s , $s \in \mathbb{N}$, которые в определенном смысле будут аппроксимировать исследуемую линию разрыва Γ . Пусть Γ_s — замкнутая ломаная без точек самопересечения, $\Gamma_s = \bigcup_{k=1}^{l_s} \Gamma_{s,k}$, где $\Gamma_{s,k}$ — отрезки (звенья ломаной), l_s — натуральное число. Считаем, что отрезки $\Gamma_{s,k}$ занумерованы так, что отрезки $\Gamma_{s,k}$, $\Gamma_{s,k+1}$ являются смежными (отрезки $\Gamma_{s,1}$, Γ_{s,l_s} также смежные). Обозначим через $|\Gamma_{s,k}|$ длину отрезка $\Gamma_{s,k}$ и положим $|\Gamma_s| = \sum_{k=1}^{l_s} |\Gamma_{s,k}|$.

Для элемента $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ определим евклидову норму $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Введем расстояние между множествами \mathbf{U} , \mathbf{V} элементов из \mathbb{R}^2

$$\rho(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \inf\{\|u - v\| : u \in \mathbf{U}, v \in \mathbf{V}\},$$

полурасстояние

$$\mu(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \sup_{u \in \mathbf{U}} \inf_{v \in \mathbf{V}} \|u - v\|$$

и евклидову окрестность точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ радиуса ε

$$O^\varepsilon(x, y) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 : \rho((x, y); (\tilde{x}, \tilde{y})) \leq \varepsilon\}.$$

Определение 2. Пусть $\mathbf{q}[\nu, \bar{q}] = \{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ — регулярная последовательность масштабов. Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ введем окрестность Q_s ломаной Γ_s : $Q_s = \bigcup_{(x,y) \in \Gamma_s} O^{q_s}(x, y)$. Пусть для всех $s, m \in \mathbb{N}$ имеем $\Gamma_{s+m} \subset Q_s$ и существует положительное число L такое, что $|\Gamma_s| \geq L$. Определим Γ как объединение предельных точек Γ_s : $\Gamma = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^2 : \exists u_s \in \Gamma_s : u_s \rightarrow \bar{u} \text{ } s \rightarrow \infty\}$. Будем говорить, что последовательность ломаных Γ_s , $s \in \mathbb{N}$, аппроксимирует линию Γ .

Замечание 1. Множество Γ не пусто и $\mu(\Gamma; \Gamma_s) \leq q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

Непустота множества Γ следует из того, что Γ_s ограничено. Значит из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Из условия $\Gamma_{s+m} \subset Q_s$ при $m \rightarrow \infty$ получаем $\mu(\Gamma; \Gamma_s) \leq q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

Требования на линию Γ будем вводить через условия на последовательность масштабов $\mathbf{q}[\nu, \bar{q}]$ и ломаные Γ_s , $s \in \mathbb{N}$. Такой подход был предложен в [13]. Условия, введенные в [13], накладывают достаточно жесткие требования на отрезки $\Gamma_{s,k}$ — они должны быть достаточно большой длины. Использование условия Липшица [14, 15] позволило объединять несколько смежных звеньев $\Gamma_{s,k}$ и, таким образом, ослабить условие на длину каждого отрезка $|\Gamma_{s,k}|$. В настоящей работе удалось еще больше

расширить класс корректности, в том числе, за счет адаптации областей усреднения.

Пусть заданы положительные вещественные числа ε_s и $V \geq 1$. Введем конусы (см. рис. 1):

$$\mathbf{K}_1(x, y) = \{(\bar{x}, \bar{y}) : |x - \bar{x}| \leq V|y - \bar{y}|\}, \quad \mathbf{K}_2(x, y) = \{(\bar{x}, \bar{y}) : |y - \bar{y}| \leq V|x - \bar{x}|\},$$

$\mathbf{K}_3(x, y)$ — это поворот конуса $\mathbf{K}_1(x, y)$ на угол $\pi/4$, $\mathbf{K}_4(x, y)$ — это поворот конуса $\mathbf{K}_2(x, y)$ на угол $\pi/4$.

Определение 3. Для любого фиксированного $t = 1, 2, 3, 4$ произвольное множество $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}^2$ назовем \mathbf{K}_t -липшицевым, если для всех точек $(x, y) \in \mathbf{G}$ имеем $\mathbf{G} \subset \mathbf{K}_t(x, y)$.

Для произвольного $s \in \mathbb{N}$ введем множества

$$\Gamma_s^t(\varepsilon_s, V) = \{(x, y) \in \Gamma_s : \Gamma_s \cap O^{\varepsilon_s}(x, y) \subset \mathbf{K}_t(x, y)\}, \quad t = 1, 2, 3, 4.$$

Обозначим $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V) = \bigcup_{t=1}^4 \Gamma_s^t(\varepsilon_s, V)$. Считаем, что для каждого $s \in \mathbb{N}$ множество $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ состоит из отрезков и имеет длину $|\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)|$ (изолированные точки, если они есть, не учитываются). Пусть множество $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ характеризуется следующими параметрами:

(*) задано вещественное число $p \geq \sqrt{1+V^2}$: $\varepsilon_s = pq_s$;

(**) задано положительное вещественное число p_1 : $\mu(\Gamma_s; \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) \leq p_1 q_s$;

(***) задано положительное вещественное число p_2 : $|\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)| \geq p_2 |\Gamma_s|$.

Условие (*) позволяет согласовать две последовательности масштабов q_s и ε_s , введенные выше. Условие $p \geq \sqrt{1+V^2}$ нужно для корректности определений, введенных ниже. Дополнительные ограничения на p , которые будут введены в теореме, обеспечат корректность работы метода локализации. Условие (**) показывает, как множество Γ_s приближается точками множества $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$. Условие (***) характеризует соотношение длин этих множеств.

Поясним, что условия (*)–(***) уже вводились в работе [15], но дополнительное ограничение снизу на параметр p в основной теореме не позволяло в [15] включить в класс корректности фракталы с большей размерностью. Применение адаптивных методов локализации позволяет существенно ослабить ограничение на параметр p .

Для удобства читателя приведем без доказательства построение семейства специальных фракталов из [15], для которых аналитически можно проверить условия (*)–(***) . Далее выделим конкретный фрактал из этого семейства, для него построим подмножество $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ и вычислим параметры p, p_1, p_2 из условий (*)–(***) .

Параметрическое семейство фракталов \mathcal{F}^\varkappa , $\varkappa = 2, 3, \dots$ Пусть выбрано и зафиксировано число $\varkappa = 2, 3, \dots$ Для конструирования фрактала \mathcal{F}^\varkappa будем строить последовательность замкнутых ломаных \mathcal{F}_s^\varkappa , $s \in \mathbb{N}$. Пусть \mathcal{F}_1^\varkappa — правильный $4\varkappa$ -угольник с длиной стороны равной единице, расположенный так, что две стороны параллельны оси OX

и две стороны параллельны оси OY ; стороны обозначим $f_k = f_k^\varkappa$, $k = 1, 2, \dots, 4\varkappa$. Строим \mathcal{F}_2^\varkappa : делим каждую сторону f_k на три части и середину заменяем боковыми сторонами равнобедренного треугольника с углами при основании $\pi/(2\varkappa)$ так, чтобы все стороны в \mathcal{F}_2^\varkappa имели одинаковую длину, а вершина треугольника смотрела вовне ломаной \mathcal{F}_2^\varkappa ; стороны обозначим f_{k,c_2} , $c_2 = (k_2)$, $k_2 = 1, 2, 3, 4$. Группу из четырех звеньев, полученных из звена f_k , обозначим $\mathcal{F}_2^\varkappa(f_k) = \{f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3}, f_{k,4}\}$. Введенные выше обозначения нужны, чтобы отслеживать из какой стороны (звена) построена группа сторон (звеньев) на следующих шагах.

Пусть построена ломаная $\mathcal{F}_{s-1}^\varkappa$. Строим ломаную \mathcal{F}_s^\varkappa : делим каждую сторону $f_{k,c_{s-1}}$, $c_{s-1} = (k_2, k_3, \dots, k_{s-1})$, $k_i = 1, 2, 3, 4$, $i = 2, 3, \dots, s-1$, ломаной $\mathcal{F}_{s-1}^\varkappa$ на три части и середину заменяем боковыми сторонами равнобедренного треугольника с углами при основании $\pi/(2\varkappa)$ так, чтобы все стороны в \mathcal{F}_s^\varkappa имели одинаковую длину, а вершина треугольника смотрела вовне ломанной \mathcal{F}_s^\varkappa . Стороны ломаной \mathcal{F}_s^\varkappa обозначим f_{k,c_s} . Как и ранее, обозначим через $\mathcal{F}_s^\varkappa(f_{k,c_{s-1}}) = \{f_{k,c_{s-1},1}, f_{k,c_{s-1},2}, f_{k,c_{s-1},3}, f_{k,c_{s-1},4}\}$ множество сторон (звеньев), полученное из звена $f_{k,c_{s-1}}$ на s -ом шаге. Фрактал \mathcal{F}^\varkappa получается из \mathcal{F}_s^\varkappa при $s \rightarrow \infty$.

Прокомментируем особенность построения последовательности \mathcal{F}_s^\varkappa , $s \in \mathbb{N}$. Для многоугольника \mathcal{F}_1^\varkappa рассмотрим множество углов между продолжением отрезков, составляющих \mathcal{F}_1^\varkappa , например, с осью OX (выбираем наименьшие по модулю углы; если отрезок параллелен оси OX , то считаем, что угол равен нулю). Для \mathcal{F}_1^\varkappa это будут углы $i\pi/(2\varkappa)$, где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \varkappa$. Очевидно, что многоугольник \mathcal{F}_1^\varkappa будет иметь $2\varkappa$ отрезков с различными минимальными углами с осью OX , причем количество отрезков, продолжение которых расположено под одним и тем же углом к оси OX , будет равно двум.

Для многоугольника \mathcal{F}_s^\varkappa , $s \in \mathbb{N}$, минимальные углы будут такими же: $i\pi/(2\varkappa)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \varkappa$; количество отрезков с различными минимальными углами с осью OX будет также $2\varkappa$, а количество отрезков с одинаковым углом будет равно 2^{2s-1} . Обозначим через $\Theta(i\pi/(2\varkappa))$ множество ребер с минимальным углом $i\pi/(2\varkappa)$ с осью OX .

С в о й с т в а \mathcal{F}_s^\varkappa .

1. Длина каждой стороны ломаной \mathcal{F}_s^\varkappa равна $(2(1 + \cos \pi/(2\varkappa)))^{1-s}$.
2. Количество сторон ломаной \mathcal{F}_s^\varkappa равно $4^s \varkappa$.
3. Длина ломаной \mathcal{F}_s^\varkappa равна $4\varkappa (2/(1 + \cos \pi/(2\varkappa)))^{s-1}$.
4. Стороны ломаной \mathcal{F}_s^\varkappa находятся на прямых, расположенных к оси OX под $2\varkappa$ различными наименьшими по модулю углами.
5. Фрактальная размерность \mathcal{F}^\varkappa равна $\ln 4 / \ln(2(1 + \cos \pi/(2\varkappa)))$.
6. Для всех $s, m \in \mathbb{N}$ имеем $\mu(\mathcal{F}_{s+m}^\varkappa; \mathcal{F}_s^\varkappa) \leq q_s$,

$$q_s = \frac{\sin \pi/(2\varkappa)}{(2(1 + \cos \pi/(2\varkappa)))^s} \left(1 - \frac{1}{2(1 + \cos \pi/(2\varkappa))} \right)^{-1}.$$

Отметим, что длина каждой ломаной \mathcal{F}_s^\varkappa конечна, но стремится к бесконечности при $s \rightarrow \infty$.

Фрактал из этого семейства при $\varkappa = 6$, который рассматривался в качестве примера в работе [15], имел размерность ≈ 1.0126 . В настоящей работе будет показано, что новым классам корректности принадлежат функции с линиями разрыва бóльшей фрактальной размерности.

Пример. В качестве примера линии разрыва Γ рассмотрим фрактал \mathcal{F}^\varkappa при $\varkappa = 3$. Фрактальная размерность $\mathcal{F}^3 \approx 1.0526$. Для последовательности аппроксимирующих ломаных $\Gamma_s = \mathcal{F}_s^3$, $s \in \mathbb{N}$, последовательность q_s из свойства 6 является регулярной последовательностью масштабов с параметрами $\nu = (2(1 + \cos \pi/6))^{-1}$, $\bar{q} = 0.183$. Длина каждого звена равна $q_s/q_1 = (2(1 + \cos \pi/12))^{1-s}$.

В отличие от [13], где условия накладываются на каждое звено ломаной Γ_s в отдельности, в настоящей работе, как и в работе [15], будем объединять несколько звеньев ломаной в группу и накладывать условия вхождения в $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ на всю эту группу звеньев.

Звенья ломаной $\Gamma_s = \mathcal{F}_s^3$ находятся на прямых, расположенных к оси OX под 6 различными углами. Для удобства сформулируем очевидное вспомогательное утверждение о \mathbf{K}_t -липшицевости, $t = 1, 2, 3, 4$, (см. определение 3) цепочки из четырех ребер ломаной Γ_s , порожденных одним ребром ломаной Γ_{s-1} , в зависимости от угла наклона этого ребра к оси OX . Положим $V = \text{tg}(5\pi/12)$.

Предложение 1. *Заметим, что для всех $s > 1$,*

(а) *если ребро $f_{k,c_{s-1}}$ принадлежит множеству $\Theta(\pi/2)$, то цепочка $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-1}} \rangle$ является \mathbf{K}_t -липшицевой для $t = 1, 3, 4$; если ребро $f_{k,c_{s-1}}$ принадлежит множеству $\Theta(0)$, то цепочка $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-1}} \rangle$ является \mathbf{K}_t -липшицевой для $t = 2, 3, 4$;*

(б) *если ребро $f_{k,c_{s-1}}$ принадлежит $\Theta(\pi/6)$, то цепочка $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-1}} \rangle$ является \mathbf{K}_t -липшицевой для $t = 2, 4$; если ребро $f_{k,c_{s-1}}$ принадлежит множеству $\Theta(-\pi/6)$, то цепочка $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-1}} \rangle$ является \mathbf{K}_t -липшицевой для $t = 2, 3$;*

(с) *если ребро $f_{k,c_{s-1}}$ принадлежит $\Theta(\pi/3)$, то цепочка $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-1}} \rangle$ является \mathbf{K}_t -липшицевой для $t = 1, 4$; если ребро $f_{k,c_{s-1}}$ принадлежит множеству $\Theta(-\pi/3)$, то цепочка $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-1}} \rangle$ является \mathbf{K}_t -липшицевой для $t = 1, 3$.*

Чтобы определить какому из множеств $\Gamma_s^t(\varepsilon_s, V)$, $t = 1, 2, 3, 4$, принадлежит цепочка ребер ломаной Γ_s , порожденных одним ребром ломаной Γ_{s-1} , нужно задать ε_s и учитывать смежные ребра. Это создает много различных вариантов и в некоторых случаях делает доказательство громоздким. По этой причине в настоящей статье будем строить подмножество множества $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$.

Пусть $s > 3$. Напомним, что для ребра $f_{k,c_{s-3}}$ ломаной Γ_{s-3} через $\Gamma_s \langle f_{k,c_{s-3}} \rangle$ обозначена цепочка звеньев ломаной Γ_s , порожденная ребром $f_{k,c_{s-3}}$.

Сначала, используя предложение 1, докажем вспомогательные утверждения.

Предложение 2. *Если ребро $\Gamma_{s-3,j} = \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}}$ принадлежит $\Theta(0)$ или $\Theta(\pi/2)$, то группа звеньев $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle \setminus \Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},2,2} \cup \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3,3} \rangle$ гарантированно принадлежит множеству $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$, где $\varepsilon_s = q_s/q_4$, $V = \text{tg}(5\pi/12)$.*

Доказательство. Возможны четыре варианта: ребро $\Gamma_{s-3,j} \in \Theta(0)$ и все последующие построения проводятся выше или ниже этого ребра; ребро $\Gamma_{s-3,j} \in \Theta(\pi/2)$ и все последующие построения проводятся правее или левее этого ребра. Рассмотрим случай, когда ребро $\Gamma_{s-3,j} \in \Theta(0)$ и все последующие построения проводятся выше этого ребра. Для остальных случаев расположения ребра $\Gamma_{s-3,j}$ рассуждения аналогичные. Положим $V = \text{tg}(5\pi/12)$, $\varepsilon_s = |\Gamma_{s-3,j}| = q_s/q_4$. Заметим, что смежные звенья $\Gamma_{s-3,j-1}, \Gamma_{s-3,j+1}$ могут располагаться под углами $5\pi/6, 7\pi/6, 8\pi/6$ к ребру $\Gamma_{s-3,j}$ (имеются в виду внешние углы ломанной Γ_{s-3}). Следовательно, без проблем со смежными звеньями в $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ можно включать ребра $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle$, которые являются \mathbf{K}_2 -лишниецевыми. Поскольку все ребра цепочки $\Gamma_{s-1} \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle$, кроме ребер $\mathfrak{f}_{k,c_{s-3},2,2}$ и $\mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3,3}$, принадлежат множествам $\Theta(0), \Theta(\pi/6), \Theta(-\pi/6)$, то группы звеньев Γ_s , порожденные этими ребрами, являются \mathbf{K}_2 -лишниецевыми (см. предложение 1). Следовательно, $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle \setminus \Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},2,2} \cup \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3,3} \rangle \subset \Gamma_s^2(\varepsilon_s, V)$. Множество $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},2,2} \cup \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3,3} \rangle$ не включаем в $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$. \square

Предложение 3. *Если ребро $\Gamma_{s-3,j} = \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}}$ принадлежит одному из множеств $\Theta(\pm\pi/6), \Theta(\pm\pi/3)$, то группа звеньев $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle$ принадлежит множеству $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$, где $\varepsilon_s = q_s/q_4$, $V = \text{tg}(5\pi/12)$.*

Доказательство. Пусть ребро $\Gamma_{s-3,j} \in \Theta(\pi/6)$. Для всех остальных случаев расположения ребра $\Gamma_{s-3,j}$ рассуждения аналогичные. Положим $V = \text{tg}(5\pi/12)$, $\varepsilon_s = q_s/q_4$. Заметим, что ребро $\mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3} \in \Theta(0)$. Повторяя для этого ребра рассуждения из доказательства предложения 2, делаем вывод, что $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3} \rangle$ принадлежит $\Gamma_s^2(\varepsilon_s, V)$.

Смежные звенья $\Gamma_{s-3,j-1}, \Gamma_{s-3,j+1}$ могут располагаться под углами $5\pi/6, 7\pi/6, 8\pi/6$ к ребру $\Gamma_{s-3,j}$ (имеются в виду внешние углы ломаной Γ_{s-3}). Следовательно, без проблем в $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ можно включать ребра $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-1}} \rangle$, которые являются \mathbf{K}_2 -лишниецевыми. Поскольку все остальные ребра $\Gamma_{s-1} \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle$, кроме уже рассмотренных ребер $\Gamma_{s-1} \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3} \rangle$, принадлежат только множествам $\Theta(0), \Theta(\pi/6), \Theta(\pi/3), \Theta(\pi/2)$, то цепочки звеньев ломаной Γ_s , порожденные этими ребрами, являются \mathbf{K}_2 -лишниецевыми (см. предложение 1). Значит $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-1}} \rangle \subset \Gamma_s^4(\varepsilon_s, V) \cup \Gamma_s^2(\varepsilon_s, V)$. \square

Пусть $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ содержит подмножество $\Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \rangle \setminus \Gamma_s \langle \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},2,2} \cup \mathfrak{f}_{k,c_{s-3},3,3} \rangle$: $\mathfrak{f}_{k,c_{s-3}} \in \Theta(0)$ или $\Theta(\pi/2)$.

Предложение 4. *Для $s > 3$ множество $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ с параметрами $\varepsilon_s = q_s/q_4$, $V = \text{tg}(5\pi/12)$ удовлетворяет условиям $(*)$ – $(***)$ при $p = 1/q_4$, $p_1 = 2/q_1$, $p_2 = 15/16$.*

Доказательство. Поскольку $\varepsilon_s = q_s/q_4$, то $p = 1/q_4$. В предложении 2 показано, что при построении подмножества множества $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ из Γ_s исключаются цепочки по четыре ребра. Значит $\mu(\Gamma_s; \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) \leq 2q_s/q_1$, т. е. $p_1 = 2/q_1$. Найдем величину p_2 , используя свойство 2. Количество звеньев в ломаной Γ_s равно $4^s \cdot 3$. Из предложений 2 и 3 следует, что мы исключаем по восемь звеньев, порожденных из половины ребер ломаной Γ_{s-3} , т. е. $4^{s-3} \cdot 3 \cdot 8/2$. Следовательно,

$$|\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)| \geq \left(4^s \cdot 3 - 4^{s-3} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{|\Gamma_s|}{4^s \cdot 3} = \frac{15}{16} |\Gamma_s|.$$

□

Замечание 2. Можно построить множество $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ с другими параметрами $\varepsilon_s, V, p, p_1, p_2$.

3 Постановка задачи, дискретизация вспомогательных функций

Введем условия на функцию f вне окрестности линии разрыва Γ . Через $\partial^- Q_s$ и $\partial^+ Q_s$ обозначим соответственно внешнюю и внутреннюю границы множества Q_s (см. определение 2), $\partial Q_s = \partial^- Q_s \cup \partial^+ Q_s$. Отметим, что в общем случае множество Q_s может не иметь внутренней границы. Тогда определения ниже некорректны. Однако ограничение в теореме на параметр p (см. условие $(*)$) обеспечит наличие внутренней границы $\partial^+ Q_s$ множества Q_s и корректность всех определений.

Определение 4. Введем множество $MV_q(\mathbb{R}^2)$ функций двух переменных $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ¹ таких, что выполняются следующие условия:

– для всех прямоугольников $\mathfrak{D}' = [A, B] \times [C, D]$ со сторонами, параллельными осям координат, если $\mathfrak{D}' \cap Q_s = \emptyset$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, то для всех $\tilde{y} \in [C, D]$ функция одной переменной $f(x, \tilde{y})$ непрерывно дифференцируема для $x \in (A, B)$; для всех $\tilde{x} \in [A, B]$ функция одной переменной $f(\tilde{x}, y)$ непрерывно дифференцируема для $y \in (C, D)$;

– для любой точки $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial^+ Q_s, s \in \mathbb{N}$, существуют пределы $f^+(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x, \tilde{y}) = \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} f(\tilde{x}, y), f_x^+(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f'_x(x, \tilde{y}), f_y^+(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} f'_y(\tilde{x}, y)$ при условии, что при предельном переходе точки $(x, \tilde{y}), (\tilde{x}, y)$ остаются внутри Q_s ;

– для любой точки $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial^- Q_s, s \in \mathbb{N}$, существуют пределы $f^-(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x, \tilde{y}) = \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} f(\tilde{x}, y), f_x^-(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f'_x(x, \tilde{y}), f_y^-(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{y \rightarrow \tilde{y}} f'_y(\tilde{x}, y)$ при условии, что при предельном переходе точка (\tilde{x}, \tilde{y}) остается снаружи Q_s ;

– функции $f^\pm(\tilde{x}, \tilde{y}), f_x^\pm(\tilde{x}, \tilde{y}), f_y^\pm(\tilde{x}, \tilde{y})$ непрерывны на $\partial^+ Q_s$ и $\partial^- Q_s$ соответственно для всех $s \in \mathbb{N}$.

¹Для получения оценок удобнее считать, что функции заданы на всей плоскости, несмотря на то, что они имеют конечный носитель.

Поскольку линия разрыва Γ аппроксимируется последовательностью ломаных Γ_s , $s \in \mathbb{N}$, введем скачок функции f для всех Γ_s в масштабе q_s . Скачок будет определен только для точек $(x, y) \in \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$. Положим $A_1 = \sqrt{1 + V^2}$.

Определение 5. Для всех $s \in \mathbb{N}$ в точках $(x, y) \in \Gamma_s^1(\varepsilon_s, V)$ определим функции $\Delta_s^1(x, y) = f(x + A_1 q_s, y) - f(x - A_1 q_s, y)$; в точках $(x, y) \in \Gamma_s^2(\varepsilon_s, V)$ определим функции $\Delta_s^2(x, y) = f(x, y + A_1 q_s) - f(x, y - A_1 q_s)$; в точках $(x, y) \in \Gamma_s^3(\varepsilon_s, V)$ определим функции $\Delta_s^3(x, y) = f(x + A_1 q_s, y + A_1 q_s) - f(x - A_1 q_s, y - A_1 q_s)$; в точках $(x, y) \in \Gamma_s^4(\varepsilon_s, V)$ определим функции $\Delta_s^4(x, y) = f(x + A_1 q_s, y - A_1 q_s) - f(x - A_1 q_s, y + A_1 q_s)$.

Замечание 3. Определение 5 корректно для $p > \sqrt{1 + V^2}$ (см. условие (*)). Причем в силу определения 4 функция $\Delta_s^t(x, y)$ непрерывна для всех $(x, y) \in \Gamma_s^t(\varepsilon_s, V)$, $t = 1, 2, 3, 4$.

Введем класс \mathfrak{M} функций двух переменных с линиями разрыва, на котором будут проводиться оценки точности работы алгоритма локализации.

Определение 6. Пусть функция $f \in MV_q(\mathbb{R}^2)$ имеет линию разрыва Γ , которая удовлетворяет определению 2; для всех $s \in \mathbb{N}$ аппроксимирующая линия Γ_s содержит подмножество $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ с параметрами p, p_1, p_2 в условиях (*)-(***); скачок функции f удовлетворяет определению 5. Класс \mathfrak{M} состоит из таких функций f , дополнительно удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) задано положительное число r такое, что для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x, y)| \leq r$; $|f'_x(x, y)| \leq r$, $|f'_y(x, y)| \leq r$ для $(x, y) \notin Q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$; $|f'_x{}^\pm(x, y)| \leq r$, $|f'_y{}^\pm(x, y)| \leq r$ для $(x, y) \in \partial Q_s$ для всех $s \in \mathbb{N}$;²
- (ii) задано положительное число Δ^{\min} :

$$\inf\{|\Delta_s^t(x, y)| : (x, y) \in \Gamma_s^t(\varepsilon_s, V), s \in \mathbb{N}, t = 1, 2, 3, 4\} \geq \Delta^{\min}.$$

Таким образом, класс \mathfrak{M} зависит от параметров $\bar{q}, \nu, L, V, p, p_1, p_2, r, \Delta^{\min}$. Без ограничения общности можно считать, что $r = 1$, что мы и будем делать в дальнейшем. Поскольку на параметр p будет наложено дополнительное условие в теореме, а на остальные параметры условия не вводятся, то для краткости будем этот класс обозначать $\mathfrak{M}(p)$.

Перейдем к постановке задачи. Введем в квадрате \mathfrak{D} равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ (условия на τ будут сформулированы в теореме): $x^n = -d + n\tau$, $y^m = -d + m\tau$, где $n = 0, 1, \dots, M$, $m = 0, 1, \dots, M$, $M = 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что M — целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d .)

²Заметим, что в определениях 4 и 6 можно ослабить условие ограниченности и непрерывной дифференцируемости функции f по x и по y до ограниченности и дифференцируемости почти всюду.

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}(p)$, функция $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $\|f^\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f_{n,m}^\delta$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ , которые связаны с функцией f^δ следующим образом:

$$f_{n,m}^\delta = \frac{1}{\tau^2} \int_{y^{m-\tau/2}}^{y^{m+\tau/2}} \int_{x^{n-\tau/2}}^{x^{n+\tau/2}} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1)$$

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством T^δ точек сетки T с оценкой точности приближения.

Замечание 4. *Постановка задачи не вполне описана, так как необходимо определить понятие “аппроксимировать”. Это понятие введено в формулировке теоремы, где дана оценка не только близости точек аппроксимирующего множества T^δ к множеству линий разрыва Γ , но и оценка количества точек множества T^δ .*

При построении регулярных методов локализации для подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f_{n,m}^\delta$. Сначала введем и исследуем вспомогательные функции (усреднения). Для проведения анализа нам понадобятся как непрерывные усредняющие функции, так и их дискретные аналоги. Определим множество Ω непрерывных усредняющих функций двух переменных. Пусть Ω состоит из финитных функций $\omega(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условиям:

(a) функция ω имеет непрерывную производную по каждой переменной; положим $C = \max\{|\omega'_x(x, y)|, |\omega'_y(x, y)| : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \omega(x, y) dx dy = 1$;

(c) $\omega(x, y) = 0$ для $(x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1]$.

Ясно, что для $\omega \in \Omega$ имеем $|\omega(x, y)| \leq 2C$ и $\omega \in W_1^1(\mathbb{R}^2)$ (здесь $W_1^1(\mathbb{R}^2)$ — соболевское пространство функций). Положим

$$\omega_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \omega\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0.$$

Напомним, что $A_1 = \sqrt{1 + V^2}$. Обозначим $[z] = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z . Введем величины $A_2 = V/2$,

$$R_s = \left\lceil \frac{A_2 \lambda + A_1 q_s}{\tau} \right\rceil. \quad (2)$$

Ясно, что

$$A_2 \lambda + A_1 q_s < R_s \tau \leq A_2 \lambda + A_1 q_s + \tau. \quad (3)$$

Параметр $R_s = R_s(\delta)$ позволяет адаптировать область усреднения к классу корректности. Для $(x, y) \in \mathfrak{D}$ введем вспомогательные функции (усреднения) непрерывного аргумента при отсутствии возмущений.

$$F_s^1(x, y) = I_\lambda(x + \lambda + R_s \tau + \tau, y + \lambda/2 + \tau/2) - I_\lambda(x - R_s \tau, y + \lambda/2 + \tau/2), \quad (4)$$

$$F_s^2(x, y) = I_\lambda(x + \lambda/2 + \tau/2, y + \lambda + R_s\tau + \tau) - I_\lambda(x + \lambda/2 + \tau/2, y - R_s\tau), \quad (5)$$

$$F_s^3(x, y) = I_\lambda(x + \lambda + R_s\tau + \tau, y + \lambda + R_s\tau + \tau) - I_\lambda(x - R_s\tau, y - R_s\tau), \quad (6)$$

$$F_s^4(x, y) = I_\lambda(x + \lambda + R_s\tau + \tau, y - R_s\tau) - I_\lambda(x - R_s\tau, y + \lambda + R_s\tau + \tau), \quad (7)$$

где

$$I_\lambda(x, y) = \int_{y-\lambda-\tau/2}^{y-\tau/2} \int_{x-\lambda-\tau/2}^{x-\tau/2} f(\xi, \eta) \omega_\lambda(x - \tau/2 - \xi, y - \tau/2 - \eta) d\xi d\eta$$

При вычислении функции $F_s^t(x, y)$, $t = 1, 2, 3, 4$, усреднение проводится вне конуса $\mathbf{K}_t(x, y)$. В ситуации, когда $(x, y) \in \Gamma_s$ принадлежит множеству $\Gamma_s^t(\varepsilon_s, V)$, при вычислении функций $F_s^t(x, y)$ линия разрыва Γ не пересекается с областью усреднения (см. рис. 1), что позволяет в дальнейшем проще проводить оценки.

Перейдем к построению соответствующих дискретных вспомогательных функций, причем вместо точной функции f используем заданные величины $f_{n,m}^\delta$ (см. формулу (1)). Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных вычисляем по формуле $\Lambda_\lambda^{i,j} = \omega_\lambda(i\tau, j\tau)\tau^2$, где $1 \leq i, j \leq 2K$. Параметр K будет определен ниже как функция уровня погрешности δ и шага сетки τ . Этот параметр определяет размер области усреднения и связан с параметром регуляризации $\lambda = \lambda(\delta)$.

Дискретные вспомогательные функции $G_s^{\delta t}$, $t = 1, 2, 3, 4$, вычисляются в точках (x^n, y^m) сетки T по формулам

$$G_s^{\delta 1}(x^n, y^m) = J_\lambda^{\delta, K}(x^{n+2K+R_s+1}, y^{m+K+1/2}) - J_\lambda^{\delta, K}(x^{n-R_s}, y^{m+K+1/2}), \quad (8)$$

$$G_s^{\delta 2}(x^n, y^m) = J_\lambda^{\delta, K}(x^{n+K+1/2}, y^{m+2K+R_s+1}) - J_\lambda^{\delta, K}(x^{n+K+1/2}, y^{m-R_s}), \quad (9)$$

$$G_s^{\delta 3}(x^n, y^m) = J_\lambda^{\delta, K}(x^{n+2K+R_s+1}, y^{m+2K+R_s+1}) - J_\lambda^{\delta, K}(x^{n-R_s}, y^{m-R_s}), \quad (10)$$

$$G_s^{\delta 4}(x^n, y^m) = J_\lambda^{\delta, K}(x^{n+2K+R_s+1}, y^{m-R_s}) - J_\lambda^{\delta, K}(x^{n-R_s}, y^{m+2K+R_s+1}), \quad (11)$$

где

$$J_\lambda^{\delta, K}(x^n, y^m) = \sum_{j=1}^{2K} \sum_{i=1}^{2K} \Lambda_\lambda^{i,j} f_{n-i, m-j}^\delta. \quad (12)$$

Лемма 1. Пусть зафиксированы усредняющая функция $\omega \in \Omega$, натуральные числа K и s . Тогда в условиях рассматриваемой задачи при $\lambda = 2K\tau$ для $(x^n, y^m) \in T$ справедливы оценки

$$|G_s^{\delta t}(x^n, y^m) - F_s^t(x^n, y^m)| \leq \frac{A_0(\delta + \tau)}{\lambda}, \quad t = 1, 2, 3, 4, \quad A_0 = 2C.$$

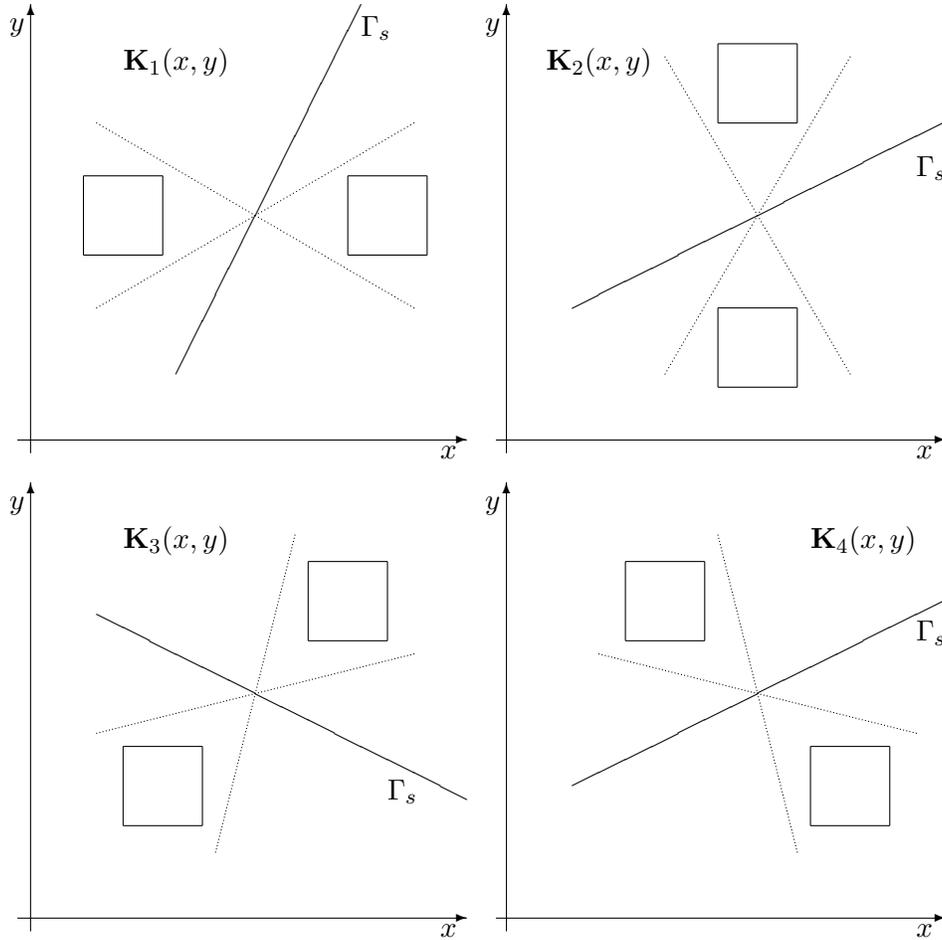


Рис. 1. Иллюстрация принадлежности звена ломаной Γ_s одному из четырех конусов $\mathbf{K}_t(x, y)$, $t = 1, 2, 3, 4$. Конусы изображены точечной линией. Квадратики показывают области усреднения в (4)–(7) в случае, когда линия Γ_s принадлежит конусам, а области усреднения лежат вне конусов.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$J_{\lambda}^{\delta, K}(x^n, y^m) - I_{\lambda}(x^n, y^m) = \sum_{j=1}^{2K} \sum_{i=1}^{2K} \Lambda_{\lambda}^{i, j} f_{n-i, m-j}^{\delta}$$

$$- \int_{y^m - \lambda - \tau/2}^{y^m - \tau/2} \int_{x^n - \lambda - \tau/2}^{x^n - \tau/2} f(\xi, \eta) \omega_{\lambda}(x^n - \tau/2 - \xi, y^m - \tau/2 - \eta) d\xi d\eta.$$

Разбивая интегралы на сумму интегралов по тем же квадратам, что и в (1), подставляя выражение для $f_{n-i, m-j}^{\delta}$ и используя обозначение

$\Delta f = f^\delta - f$, получаем

$$\begin{aligned} & J_\lambda^{\delta, K}(x^n, y^m) - I_\lambda(x^n, y^m) = \\ & \sum_{j=1}^{2K} \sum_{i=1}^{2K} \int_{y^{m-j\tau-\tau/2}}^{y^{m-j\tau+\tau/2}} \int_{x^{n-i\tau-\tau/2}}^{x^{n-i\tau+\tau/2}} f(\xi, \eta) \left[\frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} - \omega_\lambda(x^{n-\tau/2-\xi}, y^{m-\tau/2-\eta}) \right] d\xi d\eta \\ & + \sum_{j=1}^{2K} \sum_{i=1}^{2K} \frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} \int_{y^{m-j\tau-\tau/2}}^{y^{m-j\tau+\tau/2}} \int_{x^{n-i\tau-\tau/2}}^{x^{n-i\tau+\tau/2}} \Delta f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку для всех i, j имеем $|\Lambda_\lambda^{i,j}| \leq 2C\tau^2/\lambda^2$ и $\|\Delta f\|_{L_2} \leq \delta$, то, используя неравенство Коши–Буняковского, второе слагаемое оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{2K} \sum_{i=1}^{2K} \frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} \int_{y^{m-j\tau-\tau/2}}^{y^{m-j\tau+\tau/2}} \int_{x^{n-i\tau-\tau/2}}^{x^{n-i\tau+\tau/2}} \Delta f(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \\ & \leq \frac{2C}{\lambda} \int_{y^{m-\lambda-\tau/2}}^{y^{m-\tau/2}} \int_{x^{n-\lambda-\tau/2}}^{x^{n-\tau/2}} |\Delta f(\xi, \eta)| d\xi d\eta \leq \frac{2C}{\lambda^2} \delta \lambda = \frac{2C}{\lambda} \delta. \end{aligned}$$

Перейдем к оценке первого слагаемого в правой части (13). По формуле конечных приращений для функции двух переменных

$$\begin{aligned} & |\omega_\lambda(i\tau, j\tau) - \omega_\lambda(x^n - \xi, y^m - \eta)| \\ & \leq \tau |(\omega_\lambda)'_x(\theta_1, \theta_2) + (\omega_\lambda)'_y(\theta_1, \theta_2)| \leq \frac{2C\tau}{\lambda^3}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\theta_1 \in ((i-1)\tau, i\tau)$, $\theta_2 \in ((j-1)\tau, j\tau)$. Подставляя выражение для $\Lambda_\lambda^{i,j}$, используя оценку (14) и условие (i) на функцию f , для первого слагаемого в правой части (13) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{2K} \sum_{i=1}^{2K} \int_{y^{m-j\tau-\tau/2}}^{y^{m-j\tau+\tau/2}} \int_{x^{n-i\tau-\tau/2}}^{x^{n-i\tau+\tau/2}} f(\xi, \eta) \left[\frac{\Lambda_\lambda^{i,j}}{\tau^2} - \omega_\lambda(x^{n-\tau/2-\xi}, y^{m-\tau/2-\eta}) \right] d\xi d\eta \right| \\ & \leq \frac{2C\tau}{\lambda^3} \sup_{(x,y) \in \mathfrak{D}} |f| \left| \int_{y^{m-\lambda-\tau/2}}^{y^{m-\tau/2}} \int_{x^{n-\lambda-\tau/2}}^{x^{n-\tau/2}} d\xi d\eta \right| \leq \frac{2C\tau}{\lambda}. \end{aligned}$$

Поскольку рассматривалась разность для любых точек (x^n, y^m) , то лемма доказана. \square

4 Вспомогательные оценки

В следующей лемме приведены оценки сверху для функций F_s^t , $t = 1, 2, 3, 4$, определенных формулами (4)–(7), в точках $(x, y) \in \mathfrak{D}$, расположенных вне некоторой окрестности множества Γ . Напомним, что $A_1 = \sqrt{1 + V^2}$, $A_2 = V/2$, τ — шаг сетки T .

Лемма 2. Пусть зафиксированы усредняющая функция $\omega \in \Omega$ и натуральное число s . Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$ для любого $\lambda > 0$ при выполнении условия $\rho((x, y); \Gamma_s) \geq \sqrt{2}((A_2 + 1)\lambda + (A_1 + 1)q_s + 2\tau)$ имеют место оценки

$$|F_s^t(x, y)| \leq 4((A_2 + 1)\lambda + A_1 q_s + 3\tau/2), \quad t = 1, 2, 3, 4.$$

Доказательство. Поскольку $\rho((x, y); \Gamma_s) \geq \sqrt{2}((A_2 + 1)\lambda + (A_1 + 1)q_s + 2\tau) > \sqrt{2}(\lambda + R_s\tau + \tau/2) + q_s$ (используем правое неравенство в (3)), то линия разрыва Γ не пересекается с кругом с центром в точке $(x, y) \in \mathfrak{D}$ радиуса $\sqrt{2}(\lambda + R_s\tau + \tau/2)$, в котором лежат области интегрирования при вычислении функций $F_s^t(x, y)$, $t = 1, 2, 3, 4$, по формулам (4)–(7). Покажем справедливость требуемой оценки при $t = 4$. Для $t = 1, 2, 3$ оценки доказываются аналогично. Поскольку в области интегрирования при вычислении функции $F_s^4(x, y)$ по формуле (7) функция f непрерывна в области интегрирования, то для каждого слагаемого можно применить обобщенную теорему о среднем для функции двух переменных. Используя условие (b) на функцию ω , для первого слагаемого в (7) получаем

$$\begin{aligned} & I_\lambda(x + \lambda + R_s\tau + \tau, y - R_s\tau) = \\ & \int_{y - \lambda - R_s\tau - \tau/2}^{y - R_s\tau - \tau/2} \int_{x + R_s\tau + \tau/2}^{x + \lambda + R_s\tau + \tau/2} f(\xi, \eta) \omega_\lambda(x + \lambda + R_s\tau + \tau/2 - \xi, y - R_s\tau - \tau/2 - \eta) d\xi d\eta \\ & = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \int_{y - \lambda - R_s\tau - \tau/2}^{y - R_s\tau - \tau/2} \int_{x + R_s\tau + \tau/2}^{x + \lambda + R_s\tau + \tau/2} \omega_\lambda(x + \lambda + R_s\tau + \tau/2 - \xi, y - R_s\tau - \tau/2 - \eta) d\xi d\eta \\ & = f(\tilde{x}, \tilde{y}), \end{aligned}$$

где $\tilde{x} \in (x + R_s\tau + \tau/2, x + \lambda + R_s\tau + \tau/2)$, $\tilde{y} \in (y - \lambda - R_s\tau - \tau/2, y - R_s\tau - \tau/2)$.

Аналогично для второго слагаемого в формуле (7), имеем

$$\begin{aligned} & I_\lambda(x - R_s\tau, y + \lambda + R_s\tau + \tau) = \\ & \int_{y - R_s\tau + \tau/2}^{y + \lambda + R_s\tau + \tau/2} \int_{x - \lambda - R_s\tau - \tau/2}^{x - R_s\tau - \tau/2} f(\xi, \eta) \omega_\lambda(x - R_s\tau - \tau/2 - \xi, y + \lambda + R_s\tau + \tau/2 - \eta) d\xi d\eta \\ & = f(\tilde{x}, \tilde{y}), \end{aligned}$$

где $\tilde{x} \in (x - \lambda - R_s\tau - \tau/2, x - R_s\tau - \tau/2)$, $\tilde{y} \in (y + R_s\tau + \tau/2, y + \lambda + R_s\tau + \tau/2)$.

Таким образом,

$$F_s^4(x, y) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}). \quad (15)$$

Поскольку функция f и её производные f'_x, f'_y непрерывны, то, используя формулу конечных приращений для функции двух переменных, получаем

$$F_s^4(x, y) = (\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}})f'_x(\theta_1, \theta_2) + (\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}})f'_y(\theta_1, \theta_2),$$

где $\theta_1 \in (\tilde{\tilde{x}}, \tilde{x}) \subset (x - \lambda - R_s\tau - \tau/2, x + \lambda + R_s\tau + \tau/2)$, $\theta_2 \in (\tilde{\tilde{y}}, \tilde{y}) \subset (y - \lambda - R_s\tau - \tau/2, y + \lambda + R_s\tau + \tau/2)$. Поскольку $|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}| \leq 2(\lambda + R_s\tau + \tau/2)$, $|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}| \leq 2(\lambda + R_s\tau + \tau/2)$, то, учитывая условие (i) на функцию f и неравенство (3), получаем требуемую оценку:

$$|F_s^4(x, y)| \leq 4(\lambda + R_s\tau + \tau/2) \leq 4((A_2 + 1)\lambda + A_1q_s + 3\tau/2).$$

Лемма доказана. \square

В следующей лемме получены оценки снизу для модуля функций $F_s^t, t = 1, 2, 3, 4$, (см. формулы (4)–(7)) в малой окрестности множества $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$. Напомним, что величины Δ^{\min}, V являются параметрами класса корректности \mathfrak{M} , $A_1 = \sqrt{1 + V^2}, A_2 = V/2, \tau$ — шаг сетки T .

Лемма 3. Пусть зафиксированы усредняющая функция $\omega \in \Omega$ и натуральное число s . Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любого положительного λ и $\varepsilon_s \geq \sqrt{2}((A_2 + 1)\lambda + A_1q_s + 3\tau)$ в точках $(x, y) \in \mathfrak{D}$ таких, что $\rho((x, y); \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) \leq \tau$, хотя бы для одной из функций $F_s^t(x, y), t = 1, 2, 3, 4$, имеет место оценка

$$|F_s^t(x, y)| \geq \Delta^{\min} - 4((A_2 + 1)\lambda + 5\tau/2).$$

Доказательство. Поскольку $\rho((x, y); \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) \leq \tau$ и $\varepsilon_s \geq \sqrt{2}((A_2 + 1)\lambda + A_1q_s + 3\tau) > \sqrt{2}(\lambda + R_s\tau + \tau/2) + \tau$ (используем правое неравенство в (3)), то функция f непрерывна в области интегрирования при вычислении по крайней мере одной из функций $F_s^t, t = 1, 2, 3, 4$, (см. формулы (4)–(7)). Пусть $\rho((x, y); \Gamma_s^4(\varepsilon_s, V)) \leq \tau$. В этом случае для функции F_s^4 справедливо разложение (15), поскольку при его получении в доказательстве предыдущей леммы требовалась непрерывность функции f в области интегрирования в формуле (7). Имеем

$$F_s^4(x, y) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}),$$

где $\tilde{x} \in (x + R_s\tau + \tau/2, x + \lambda + R_s\tau + \tau/2)$, $\tilde{y} \in (y - \lambda - R_s\tau - \tau/2, y - R_s\tau - \tau/2)$, $\tilde{\tilde{x}} \in (x - \lambda - R_s\tau - \tau/2, x - R_s\tau - \tau/2)$, $\tilde{\tilde{y}} \in (y + R_s\tau + \tau/2, y + \lambda + R_s\tau + \tau/2)$.

Из условия $\rho((x, y); \Gamma_s^4(\varepsilon_s, V)) \leq \tau$ следует, что существует точка (\bar{x}, \bar{y}) из множества $\Gamma_s^4(\varepsilon_s, V)$ такая, что $|x - \bar{x}| \leq \tau, |y - \bar{y}| \leq \tau$. Используя формулу конечных приращений для функции двух переменных, получаем

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}, \tilde{y}) &= f(\bar{x} + A_1q_s, \bar{y} - A_1q_s) + (\tilde{x} - \bar{x} - A_1q_s)f'_x(\theta_1, \theta_2) + (\tilde{y} - \bar{y} + A_1q_s)f'_y(\theta_1, \theta_2), \\ f(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}) &= f(\bar{x} - A_1q_s, \bar{y} + A_1q_s) + (\tilde{\tilde{x}} - \bar{x} + A_1q_s)f'_x(\theta_3, \theta_4) + (\tilde{\tilde{y}} - \bar{y} - A_1q_s)f'_y(\theta_3, \theta_4), \end{aligned}$$

где $\theta_1 \in (\bar{x}, \tilde{x})$, $\theta_2 \in (\bar{y}, \tilde{y})$, $\theta_3 \in (\bar{x}, \tilde{\tilde{x}})$, $\theta_4 \in (\bar{y}, \tilde{\tilde{y}})$.

Поскольку, используя (3), имеем

$$\begin{aligned}\tilde{x} - A_1 q_s &\in (x + A_2 \lambda + \tau/2, x + (A_2 + 1)\lambda + \tau/2), \\ \tilde{\tilde{x}} + A_1 q_s &\in (x - (A_2 + 1)\lambda - \tau/2, x - A_2 \lambda - \tau/2), \\ \tilde{y} + A_1 q_s &\in (y - (A_2 + 1)\lambda - \tau/2, y - A_2 \lambda - \tau/2), \\ \tilde{\tilde{y}} - A_1 q_s &\in (y + A_2 \lambda + \tau/2, y + (A_2 + 1)\lambda + \tau/2),\end{aligned}$$

то

$$|\tilde{x} - \bar{x} - A_1 q_s| \leq |\tilde{x} - A_1 q_s - x| + |x - \bar{x}| \leq (A_2 + 1)\lambda + 5\tau/2,$$

$$|\tilde{\tilde{x}} - \bar{x} + A_1 q_s| \leq |\tilde{\tilde{x}} + A_1 q_s - x| + |x - \bar{x}| \leq (A_2 + 1)\lambda + 5\tau/2.$$

$$|\tilde{y} - \bar{y} + A_1 q_s| \leq (A_2 + 1)\lambda + 5\tau/2, \quad |\tilde{\tilde{y}} - \bar{y} - A_1 q_s| \leq (A_2 + 1)\lambda + 5\tau/2,$$

Так как $|f(\bar{x} + A_1 q_s, \bar{y} - A_1 q_s) - f(\bar{x} - A_1 q_s, \bar{y} + A_1 q_s)| = |\Delta_s^4(\bar{x}, \bar{y})| \leq \Delta^{\min}$ (см. определение 5), то, учитывая условие (i) на функцию f , получаем требуемую оценку. \square

Напомним, что величины Δ^{\min} , V входят в определение класса корректности \mathfrak{M} ; $A_0 = 2C$, $A_1 = \sqrt{1 + V^2}$, $A_2 = V/2$. Введем константы

$$P = \frac{\Delta^{\min}}{2}, \quad D = \frac{3A_0}{2P}, \quad B_0 = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{D}{12(A_1/3 + A_2 + 3)} \right\}.$$

Положим

$$K = K(\tau, \delta) = \left\lceil \frac{D\delta}{2\tau} \right\rceil. \quad (16)$$

Здесь $\lceil z \rceil = [z] + 1$, где $[z]$ — целая часть числа z . Напомним, что (см. формулировку леммы 1)

$$\lambda = 2K\tau. \quad (17)$$

Если $\tau \leq B_0\delta$, то при связи параметров (16), (17) имеем

$$D\delta < \lambda \leq D\delta + 2\tau \leq 2D\delta. \quad (18)$$

Кроме того, из условия $\tau \leq B_0\delta$ следует, что

$$\tau < \lambda/36. \quad (19)$$

В точках (x^n, y^m) сетки T определим функцию

$$H_s^\delta(x^n, y^m) = \max\{|G_s^{\delta t}(x^n, y^m)|, t = 1, 2, 3, 4\}. \quad (20)$$

Введем константу

$$\delta_0 = \frac{P}{24D(A_1/3 + A_2 + 1)}.$$

Лемма 4. Пусть зафиксированы усредняющая функция $\omega \in \Omega$ и натуральное число s . Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $\delta \leq \delta_0$, $\tau \leq B_0\delta$, $q_s \leq \lambda/3$ и $\varepsilon_s \geq \sqrt{2}((A_2+1)\lambda + A_1q_s + 3\tau)$ при связи параметров (16), (17) для значения функции H_s^δ в точке $(x^n, y^m) \in T$ имеют место оценки

- (1) если $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) \geq \sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau)$, то $H_s^\delta(x^n, y^m) < P$;
(2) если $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) \leq \tau$, то $H_s^\delta(x^n, y^m) > P$.

Доказательство. Покажем справедливость (1). Для точек (x^n, y^m) сетки T таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s) \geq \sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau)$, используя оценки лемм 1 и 2, получаем

$$H_s^\delta(x^n, y^m) \leq \frac{A_0(\delta + \tau)}{\lambda} + 4((A_2+1)\lambda + A_1q_s + 3\tau/2).$$

При данном выборе параметров, используя оценку снизу для λ из (18), имеем неравенство $A_0\delta/\lambda \leq A_0/D \leq 2P/3$; поскольку $\tau \leq B_0\delta$, то $A_0\tau/\lambda \leq A_0B_0/D \leq P/6$; используя оценку сверху из (18) для λ и учитывая, что $\delta \leq \delta_0$, $\tau \leq B_0\delta$, имеем $4((A_2+1)\lambda + A_1q_s + 3\tau/2) < P/6$. Следовательно,

$$H_s^\delta(x^n, y^m) < P.$$

Перейдем к доказательству (2). Для точек $(x^n, y^m) \in T$ таких, что $\rho((x^n, y^m); \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) \leq \tau$, используя оценки лемм 1 и 3, получаем

$$H_s^\delta(x^n, y^m) \geq \Delta^{\min} - \frac{A(\delta + \tau)}{\lambda} - 4((A_2+1)\lambda + 5\tau/2).$$

При данном выборе параметров, используя оценку сверху из (18) для λ и условие $\delta \leq \delta_0$, имеем $4((A_2+1)\lambda + 5\tau/2) < P/6$. Следовательно, учитывая оценки из доказательства пункта (1) настоящей леммы, $H_s^\delta(x^n, y^m) > P$. \square

5 Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Изложенный в этом пункте метод локализации определяет подмножество T^δ точек сетки T , аппроксимирующих линию разрыва Γ . Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ . Договоримся, если $T^\delta = \emptyset$, считать $\rho((x^n, y^m); T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n, y^m) сетки T . Напомним, что функция H_s^δ определена в (20); константы Δ^{\min} , V введены в определении класса \mathfrak{M} ; $P = \Delta^{\min}/2$, $A_0 = 2C$, $A_1 = \sqrt{1+V^2}$, $A_2 = V/2$, $D = 3A_0/(2P)$.

Приведенный ниже алгоритм локализации в своей работе использует параметр регуляризации, который является функцией уровня погрешности данных δ и шага сетки τ ,

$$K = K(\tau, \delta) = \left\lceil \frac{D\delta}{2\tau} \right\rceil, \quad \lambda = 2K\tau. \quad (21)$$

Сформулируем правило выбора масштаба q_s в зависимости от уровня погрешности δ : выберем и зафиксируем $s = s(\delta)$ такое, что

$$3q_s \leq \lambda(\delta) < 3q_{s-1}. \quad (22)$$

При вычислении вспомогательной функции H_s^δ необходима величина R_s , которая определяется формулой (2).

А л г о р и т м $PD(\delta, \tau, f_{n,m}^\delta)$

Подготовка к циклу. Положим $N := 0$; $T^\delta := \emptyset$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) сетки T . Если в процессе перебора не осталось не рассмотренных точек сетки T , то конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка; если $H_s^\delta(x^n, y^m) > P$ и

$$\rho((x^n, y^m); T^\delta) > \sqrt{2}((2A_2 + 3)\lambda + 2(A_1 + 1)q_s + 4\tau),$$

то $N := N + 1$; $T^\delta := T^\delta \cup (x^n, y^m)$ и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать усредняющую функцию $\omega \in \Omega$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и усредняющая функция выбраны и зафиксированы.

Напомним, что величины \bar{q} , ν , L , V , p , p_1 , p_2 , Δ^{\min} являются параметрами класса корректности \mathfrak{M} ,

$$P = \frac{\Delta^{\min}}{2}, \quad D = \frac{3A_0}{2P}, \quad B_0 = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{D}{12(A_1/3 + A_2 + 3)} \right\}.$$

Положим $B = \sqrt{2}(A_1/3 + A_2 + 2)$,

$$D_0 = 2\sqrt{2} \left(\frac{3(A_2 + 2)}{\nu} + A_1 + 1 \right), \quad \bar{\delta}_0 = \min \left\{ \delta_0, \frac{3\bar{q}}{2D} \right\}.$$

Теорема. В условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \leq \bar{\delta}_0$, $\tau \leq B_0\delta$ при связи параметров (21), выборе $s = s(\delta)$ по правилу (22) и выполнении условия $p \geq D_0$ алгоритм $PD(\delta, \tau, f_{n,m}^\delta)$ построит множество точек $T^\delta \neq \emptyset$ такое, что

$$(1) \quad \mu(T^\delta; \Gamma) \leq BD\delta;$$

$$(2) \quad \mu(\Gamma; T^\delta) \leq 2(B + (p_1 + 1)/3)D\delta;$$

(3) для всех различных точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$ справедливо неравенство $\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) > \sqrt{2}(3 + V)D\delta$;

$$(4) \quad \frac{p_2L}{4BD\delta} \leq N(T^\delta) \leq \frac{1}{D} \frac{|\Gamma_s|}{\delta}.$$

Доказательство. Напомним, что согласно (22) выбираем $s = s(\delta)$ такое, что $3q_s \leq \lambda(\delta) < 3q_{s-1}$. Ясно, что $s(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Используя условие (*) из пункта 1 настоящей работы и условие теоремы $p \geq D_0$

имеем

$$\varepsilon_s \geq D_0 q_s = 2\sqrt{2} \left(\frac{3(A_2+2)}{\nu} + A_1+1 \right) q_s \geq 2\sqrt{2}((A_2+2)\lambda + (A_1+1)q_s).$$

Поскольку $\lambda > 3\tau$ (см. (19)), то выполнено условие на ε_s в лемме 4. Следовательно, определения в пункте 2 статьи корректны.

Докажем оценку (1). Из оценки (1) леммы 4 следует, что

$$\mu(T^\delta; \Gamma) \leq \sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau).$$

Используя для оценки q_s правило (22), оценку сверху для λ из (18) и условие $\tau \leq B_0\delta$, получаем требуемое неравенство.

Докажем оценку (2). Согласно алгоритму ПД все $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^δ радиусом $\sqrt{2}((2A_2+3)\lambda + 2(A_1+1)q_s + 5\tau)$. Если это не так, то согласно оценке (2) леммы 4, обязательно найдется точка сетки T , не принадлежащая множеству T^δ , в которой функция H_s^δ больше порога P . Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма ПД перебираются все точки сетки T . Следовательно, при выбранных $s = s(\delta)$ и $\tau \leq B_0\delta$, используя оценку сверху для λ из (18), имеем

$$\begin{aligned} \mu(\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V); T^\delta) &\leq \sqrt{2}((2A_2+3)\lambda + 2(A_1+1)q_s + 5\tau) \\ &\leq 2\sqrt{2}(A_1/3 + A_2 + 2)D\delta. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\mu(\Gamma; T^\delta) \leq \mu(\Gamma; \Gamma_s) + \mu(\Gamma_s; \Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)) + \mu(\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V); T^\delta),$$

то, используя для оценки первого и второго слагаемого замечание 1 и условие (**) соответственно, получаем требуемую оценку.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$. По построению множества T^δ алгоритмом ПД справедливо неравенство

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) > \sqrt{2}((2A_2+3)\lambda + 2(A_1+1)q_s + 4\tau) > \sqrt{2}(2A_2+3)D\delta.$$

Учитывая, что $A_2 = V/2$, получаем требуемую оценку.

Докажем оценки (4). Согласно оценке (1) леммы 4 круг с центром в точке из множества T^δ радиусом $\sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau)$ обязательно содержит точку из Γ_s . Пусть $(x^n, y^m) \in T^\delta$, тогда существует $(x, y) \in \Gamma_s$ такая, что $\rho((x^n, y^m); (x, y)) \leq \sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau)$. Аналогично для $(x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}) \in T^\delta$ существует $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_s$ такая, что $\rho((x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}); (\bar{x}, \bar{y})) \leq \sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau)$. Поскольку

$$\rho((x, y); (\bar{x}, \bar{y})) \geq \rho((x^{\bar{n}}, y^{\bar{m}}); (x^n, y^m)) - 2(\sqrt{2}((A_2+1)\lambda + (A_1+1)q_s + 2\tau)),$$

то, используя оценку для первого слагаемого из доказательства оценки (2) настоящей теоремы, имеем $\rho((x, y); (\bar{x}, \bar{y})) \geq \sqrt{2}\lambda$. Следовательно, справедлива следующая оценка сверху для количества точек множества T^δ :

$$N(T^\delta) \leq \frac{|\Gamma_s|}{\sqrt{2}\lambda} \leq \frac{|\Gamma_s|}{\sqrt{2}D\delta}.$$

Получим оценку снизу. В доказательстве оценки (2) показано, что все $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^δ радиусом $\sqrt{2}((2A_2 + 3)\lambda + 2(A_1 + 1)q_s + 5\tau)$. Поскольку при выбранных $s(\delta)$ и τ имеем $\varepsilon_s - \sqrt{2}((2A_2 + 3)\lambda + 2(A_1 + 1)q_s + 5\tau) > \sqrt{2}\lambda/2 > 0$, то количество таких кругов на $\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)$ должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)|}{2\sqrt{2}((2A_2 + 3)\lambda + 2(A_1 + 1)q_s + 5\tau)}.$$

Используя для знаменателя оценки из доказательства оценки (2) теоремы и условие (**), получаем требуемую оценку.

$$\frac{|\Gamma_s^{\text{con}}(\varepsilon_s, V)|}{2\sqrt{2}((2A_2 + 3)\lambda + 2(A_1 + 1)q_s + 5\tau)} \geq \frac{p_2 L}{4\sqrt{2}(A_1/3 + A_2 + 2)D\delta}.$$

□

Заметим, что в отличие от [15] величина D_0 в данном случае не зависит от Δ^{\min} (т. е. условие на параметр p не зависит от величины скачка) и от усредняющей функции ω .

Пример (продолжение). Пусть функция $f(x, y)$ имеет разрыв по линии $\Gamma = \mathcal{F}^3$ из примера в пункте 1 настоящей работы. Пусть функция $f(x, y)$ равна нулю вне линии Γ и равна единице внутри этой фрактальной линии. Ясно что $f(x, y)$ принадлежит классу корректности настоящей работы и не принадлежит классу корректности работы [15]. Напомним, что фрактальная размерность $\mathcal{F}^3 \approx 1.0526$ (в [15] классу корректности принадлежит функция с линией разрыва фрактальной размерности ≈ 1.0126). Проверим условие на параметр p из теоремы для этого примера. Нужно показать, что $p \geq D_0$. Напомним, что $p = 1/q_4$, $D_0 = 2\sqrt{2}(3(A_2 + 2)/\nu + A_1 + 1)$, где $\nu = (2(1 + \cos(\pi/6)))^{-1}$, $V = \text{tg}(5\pi/12)$, $A_1 = \sqrt{1 + V^2}$, $A_2 = V/2$, $q_s = \sin(\pi/6)\nu^s/(1 - \nu)$. Вычисляя эти величины, убеждаемся, что при данных параметрах $p > D_0$. Следовательно, заключение теоремы для функции $f(x, y)$, линией разрыва которой является фрактал \mathcal{F}^3 , справедливо.

Заключение. В настоящей работе построены новые адаптивные методы локализации, в которых области усреднения зависят, в том числе, от уровня погрешности входных данных; для этих методов получены оценки точности локализации и разделимости. По сравнению с работой [15] существенно расширен класс корректности, на котором гарантирована работоспособность построенных методов.

References

- [1] A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin *Methods for the solution of ill-posed problems*, Nauka, Moscow, 1979; Wiley, New York, 1981.
- [2] V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana *Theory of linear ill-posed problems and its applications*, VSP, Utrecht, 2002.

- [3] V.V. Vasin, A.L. Ageev *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, VSP, 1995.
- [4] S. Mallat *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*, Academic Press, New York, 1999.
- [5] Ya. A. Furman et al., *Introduction to Contour Analysis and Its Applications to Processing Images and Signals*, Fizmatlit, Moscow, 2002 [in Russian].
- [6] R.C. Gonzalez, R.E. Woods *Digital image processing (3rd Edition)*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2006, 976 p.
- [7] M. Mafi, H. Rajaei, M. Cabrerizo, M. Adjouadi *A robust edge detection approach un the presence of high impulse noise intensity through switching adaptive median and fixed weighted mean filtering* IEEE Trans. on image processing. 2018, vol. 27, no. 11, pp. 5475–5489.
- [8] M. Mozerov, J. Weijer *Improved recursive geodesic distance computation for edge preserving filter* IEEE Trans. on image processing, 2017, vol. 26, no. 8, pp. 3696–3706.
- [9] T. V. Antonova *A method for localization of discontinuity lines of an approximately defined function of two variables* Numerical Analysis and Application **5(4)** (2012), 285–296.
- [10] A.L. Ageev, T.V. Antonova *Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2012, vol 6(3) (2012), 269–279.
- [11] A. L. Ageev, T. V. Antonova *A Discrete Algorithm for Localizing the Discontinuity Lines of a Function of Two Variables*, Journal of Applied and Industrial Mathematics. **11:4**, (2017) 463–471.
- [12] A. L. Ageev, T. V. Antonova *On the problem of global localization of discontinuity lines for a function of two variables*, Proc. Steclov Inst. Math. **307** (Suppl. 1), 1–12 (2019)
- [13] A. L. Ageev, T. V. Antonova *On the localization of nonsmooth discontinuity lines of a function of two variables*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **25:2** (2019), 12–23 [in Russian].
- [14] A. L. Ageev, T. V. Antonova *New Accuracy Estimates for Methods for Localizing Discontinuity Lines of a Noisy Function*. Numer. Analys. Appl. **13** (2020) 293–305.
- [15] A. L. Ageev, T. V. Antonova *On the Localization of Fractal Lines of Discontinuity from Noisy Data*, Russian Mathematics, **67:9** (2023), 22–37
- [16] Richard M. Crownover *Introduction to Fractals and Chaos*, Boston,London: Jones and Bartlett Publishers, 1995.

ALEXANDR LEONIDOVICH AGEEV
KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
ST. S.KOVALEVSKOI, 16,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: ageev@imm.uran.ru

TATIANA VLADIMIROVNA ANTONOVA
KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS,
ST. S.KOVALEVSKOI, 16,
620990, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: tvantonova@imm.uran.ru