mybluergb0.03,
0.27,
0.79

S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.55
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 32A10

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.К.Белошапка

Представлено

Abstract: Изучение аналитических функций двух переменных с точностью до действия функциями одного переменного (калибровочная псевдогруппа) естественно приводит к обсуждению арифметических свойств функций двух переменных (бинарных операций) с точностью до такого действия. В данной заметке обсуждаются свойства коммутативности и ассоциативности.

Keywords: analytical complexity, commutativity, associativity.

1.Введение

Все непрерывные функции двух переменных $f(x,y)$, определенные на квадрате $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, имеют представление вида

$$f(x,y) = c_1(a_1(x)+b_1(y)) + c_2(a_2(x)+b_2(y)) + c_3(a_3(x)+b_3(y)) + c_4(a_4(x)+b_4(y)) + c_5(a_5(x)+b_5(y)),$$

где $(a_j, b_j, c_j),\ j = 1,2,3,4,5,$ – непрерывны [1].

Для гладких, а тем более аналитических функций, ситуация меняется коренным образом [2], [3], [4]. Для понимания того, в каком смысле аналитические функции двух переменных сложнее тех, которые могут быть представлены в виде суперпозиции аналитических функций одного переменного и сложения, уместно ввести в рассмотрение возрастающую иерархию классов сложности Cl^n [5]. Класс Cl^n состоит из функций, которые допускают представление глубины не более чем n. Другими словами, имеет место следующее индуктивное определение. Класс Cl^0 – это все функции, зависящие лишь от одной переменной (x или y). Далее,

V.K.Beloshapka, Об алгебраических свойствах аналитических функций

$$Cl^{n+1} = \{z :\ z(x,y) = c(A_n(x,y) + B_n(x,y)),\ A_n,\, B_n \in Cl^n,\ c \in Cl^0\}.$$

Пишем $N(z) = n$ (порядок сложности), если $z \in Cl^n \setminus Cl^{n-1}$. Значения $N(z)$ меняются от нуля до бесконечности. Функция имеет порядок равный бесконечности, если она не попала ни в один из классов Cl^n.

Если в индуктивном определении классов заменить сложение на произвольную (фиксированную) функцию $\varphi(x,y)$ двух переменных, то мы получим другую иерархию классов Cl^n_φ и другие порядки сложности $N_\varphi(z)$.

Рассмотрим псевдогруппу $\mathcal{G}$ преобразований, состоящую из преобразований вида

$$x \to \alpha(x),\ y \to \beta(y),\ z \to \gamma(z),$$

(α, β, γ) – непостоянные аналитические функции одного переменного, т.е.

$$z(x,y) \to \gamma^{-1}(z(\alpha(x), \beta(y))).$$

Роль псевдогруппы $\mathcal{G}$ в той теории сложности, о которой идет речь, определяется тем, что при любом выборе базовой функции φ все классы и порядки сложности инвариантны относительно действия этой псевдогруппы.

В действии псевдогруппы $\mathcal{G}$ можно выделить правое действие $z(x,y) \to z(a(x), b(y))$ (действие в прообразе) и левое действие $z(x,y) \to c(z(x,y))$ (действие в образе). Соответственно, в $\mathcal{G}$ имеется две псевдоподгруппы $\mathcal{G}_{xy} = \{g = (c,a,b) \in \mathcal{G} : c = Id\}$ (правое действие) и $\mathcal{G}_z = \{g = (c,a,b) \in \mathcal{G} : a = b = Id\}$ (левое действие). Очевидно, $\mathcal{G}$ есть прямое произведение $\mathcal{G}_{xy}$ и $\mathcal{G}_z$.

Действие $\mathcal{G}$ порождает на функциях двух переменных отношение эквивалентности. Соответственно, можно говорить о правой и левой эквивалентности, имея в виду действие $\mathcal{G}_{xy}$ и $\mathcal{G}_z$.

Среди функций двух переменных есть всем известные четыре арифметических действия: сложение, умножение, вычитание и деление. Ясно, что по отношению к нашему отношению эквивалентности

$$(x+y) \sim (x-y) \sim (x\,y) \sim \left(\frac{x}{y}\right).$$

Класс Cl^1, в который попали все арифметические действия, обладает любопытным уникальным свойством. Если $z(x,y)$ – аналитическая функция двух переменных (т.е. $z'_x\, z'_y$ не есть тождественный ноль), мы можем рассмотреть стабилизатор в $\mathcal{G}$:

$$St(z) = \{g = (a,b,c) \in \mathcal{G} : g \cdot z = z\}.$$

Это некоторая псевдоподгруппа в $\mathcal{G}$. Мы можем также рассмотреть соответствующую алгебру Ли векторных полей и говорить о ее размерности, которую обозначим через $d(z)$. Оказывается, что $[(x+y)]$ – класс эквивалентности, в который попали все арифметические операции, – уникален в следующем смысле [6].

$$\text{Если } [z]=[(x+y)], \text{ то } d(z)=3, \text{ иначе } d(z)\le 1.$$

В алгебре на арифметические действия принято смотреть как на бинарные операции. Причем имеется некий набор свойств, которым бинарные операции могут удовлетворять (или не удовлетворять). Мы говорим об их коммутативности, ассоциативности и пр.

2. Квазикоммутативность

Уместно поставить вопрос о коммутативности бинарной операции (т.е. аналитической функции двух переменных) с точностью до действия калибровочных преобразований. Например, полином $2\,x^2-3\,y^2+4\,x+5\,y-7$, очевидно, не выдерживает перестановки переменных. Но с помощью аффинного преобразования из $\mathcal{G}$ его нетрудно привести к виду x^2+y^2, а эта функция уже коммутативна.

Определение 1: Говорим, что функция $\varphi(x,y)$ *квазикоммутативна*, если найдутся три непостоянных аналитических функции одного переменного $g=(a,b,c)\in\mathcal{G}$, т.ч. $\psi(x,y)=g\cdot\varphi(x,y)=c(\varphi(a(x),b(y)))$ – коммутативна, т.е.

$$\psi(y,x)=c(\varphi(a(y),b(x)))=c(\varphi(a(x),b(y)))=\psi(x,y). \tag{1}$$

Отметим, что для того чтобы обе части равенства одновременно имели смысл, нужно оговорить, что у нас имеется голоморфный элемент функции φ в окрестности точки на диагонали $x=y$.

Приведем некоторые формулировки, эквивалентные определению 1. Обозначим через T – это оператор перестановки переменных $T(x,y)=(y,x)$, т.е. $\varphi\circ T(x,y)=\varphi(y,x)$.

Утверждение 2: Следующие утверждения относительно функции $\varphi(x,y)$ эквивалентны ее квазикоммутативности.
(i) Найдется непостоянная функция α, т.ч. $\varphi(\alpha(x),\alpha^{-1}(y))=\varphi(y,x)$.
(ii) Функция $\varphi(y,x)=\varphi\circ T(x,y)$ правоэквивалентна $\varphi(x,y)$ (т.е. $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентна).
(iii) Найдется непостоянная функция α, т.ч. $\varphi(\alpha(x),y)=\varphi\circ T(x,\alpha(y))$.
(iv) Найдется коммутативная функция $\chi(x,y)$ и непостоянная функция d, т.ч.

$$\varphi(x,y)=\chi(d(x),y)=\chi(x,d(y)).$$

Доказательство: Рассмотрим соотношение (1) в окрестности такой точки (x_0, y_0), где определены обе части соотношения и при этом все производные $a'(x_0)$, $b'(y_0), c'(\varphi(a(x_0), b(y_0)))$, $c'(\varphi(a(y_0), b(x_0)))$ отличны от нуля (т.е. определены все обратные a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}). Применяя к обеим частям (1) c^{-1}, получаем $\varphi(a(x), b(y)) = \varphi(a(y), b(x))$. Далее, в этом соотношении вместо x подставим $b^{-1}(x)$, а вместо y подставим $a^{-1}(y)$. Получим $\varphi(a(b^{-1}(x)), b(a^{-1}(y))) = \varphi(y, x)$. Заметим, что $a \circ b^{-1}$ и $b \circ a^{-1}$ взаимно обратны. Заменим первую функцию на α, а вторую на α^{-1}, получим соотношение

$$\varphi(\alpha(x), \alpha^{-1}(y)) = \varphi(y, x) = \varphi \circ T(x, y). \tag{2}$$

Это доказывает (i). Также мы получаем, что из квазикоммутативности следует $\varphi(y, x) = \varphi \circ T(x, y)$ правоэквивалентна $\varphi(x, y)$. Наши преобразования обратимы, поэтому справедлива обратная импликация. В соотношении (2) вместо y подставим $\alpha(y)$. Получим $\varphi(\alpha(x), y) = \varphi(\alpha(y), x)$, т.е. получаем (iii). Положим $\chi(x, y) = \varphi(\alpha(x), y) = \varphi(\alpha(y), x)$. Ясно, что $\chi(x, y) = \chi(y, x)$. Полагая $d = \alpha^{-1}$, получаем (iv). Утверждение доказано.

Учитывая утверждение 2, мы можем сказать, что семейство квазикоммутативных функций – это $\mathcal{G}_{xy}$-орбита подпространства коммутативных функций.

Любая ли функция двух переменных квазикоммутативна? Ответ отрицательный.

Утверждение 3: Функция $x^2 + x\,y$ не является квазикоммутативной. *Доказательство:* Запишем условие квазикоммутативности в форме (ii). Получаем

$$(\alpha(x))^2 + \alpha(x)\,y = (\alpha(y))^2 + \alpha(y)\,x. \tag{3}$$

Если в этом соотношении зафиксировать значение переменной y, то мы получаем квадратное уравнение относительно $\alpha(x)$, все решения которого имеют вид $\alpha(x) = p\sqrt{x+q} + r,\ p \neq 0$. Подставляя это значение для α в (3), видим, что таких (p, q, r) не существует. Утверждение доказано.

Для того чтобы написать условие квазикоммутативности произвольной функции, рассмотрим более общую задачу о $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности голоморфного элемента функции $\varphi(X, Y)$ в окрестности (X_0, Y_0) и элемента $\psi(x, y)$ в окрестности (x_0, y_0). Пусть

$$\varphi(a(x), b(y)) = \psi(x, y). \tag{4}$$

Положим

$$\begin{aligned} &\varphi(X, Y_0) = f_\varphi^{Y_0}(X) = f_\varphi(X), \quad \psi(x, y_0) = f_\psi^{y_0}(x) = f_\psi(x),\\ &\varphi(X_0, Y) = g_\varphi^{X_0}(Y) = g_\varphi(Y), \quad \psi(x_0, y) = g_\psi^{x_0}(y) = g_\psi(y),\\ &\qquad X_0 = a(x_0),\ Y_0 = b(y_0), \end{aligned}$$

т.е., фиксируя одно из переменных, мы получаем из функции двух переменных функцию одного переменного. Пусть точка (x_0, y_0) выбрана так, что φ'_X и φ'_Y не равны нулю в (X_0, Y_0), т.е. $f_\varphi(X)$ и $g_\varphi(Y)$ – локально обратимы. Подставляя в (4) сначала $y = y_0$, а потом $x = x_0$, получаем $f_\varphi(a(x)) = f_\psi(x)$, $g_\varphi(b(y)) = g_\psi(y)$, т.е.

$$a(x) = (f_\varphi)^{-1} \circ f_\psi(x), \quad b(y) = (g_\varphi)^{-1} \circ g_\psi(y).$$

Таким образом получаем, что критерием $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности $\varphi(X, Y)$ и $\psi(x, y)$ является соотношение

$$\varphi\left((f_\varphi)^{-1} \circ f_\psi(x), (g_\varphi)^{-1} \circ g_\psi(y)\right) = \psi(x, y). \tag{5}$$

Применяя полученный критерий в окрестности точки диагонали $(x = y)$ для пары функций $\varphi(X, Y)$ и $\psi = \varphi(y, x)$, получаем следующее утверждение

Утверждение 4: Критерием квазикоммутативности функции $\varphi(x, y)$ является следующее соотношение

$$\varphi\left((f_\varphi)^{-1} \circ f_\varphi(x), (g_\varphi)^{-1} \circ g_\varphi(y)\right) = \varphi(y, x).$$

Пусть функция $r(x, y)$, которую мы тестируем на квазикоммутативность, рациональна. Тогда на задачи исключения неизвестных функций, которые мы рассматривали, можно смотреть как на задачи исключения неизвестных и решать их с помощью другой алгебраической техники – техники результантов.

Как было показано выше, вопрос о квазикоммутативности сводится к проверке того, что функция $r(y, x)$ является $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентной функции $r(x, y)$. Рассмотрим более общий вопрос, вопрос о проверке $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности двух рациональных функций $r(x, y)$ и $R(x, y)$. Это по определению вопрос о существовании таких аналитических функций a и b, что $r(x, y) = R(a(x), b(y))$. Нетрудно проверить, что следующее дифференциально-рациональное выражение

$$J(z)(x, y) = \frac{z''_{xy}(x, y)}{z'_x(x, y)\, z'_y(x, y)}$$

является дифференциальным ковариантом $\mathcal{G}_{xy}$-действия. А именно, если $g = (a, b) \in \mathcal{G}_{xy}$, то $J(g \circ z)(x, y) = g \circ J(z)(x, y) = J(z)(a(x), b(y))$, т.е. при $\mathcal{G}_{xy}$-действии J преобразуется не как дифференциальное выражение, а как функциональное. К этому можно добавить, что два дифференциальных оператора

$$D_x(\chi(z)) = \frac{1}{z'_x}\,\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad D_y(\chi(z)) = \frac{1}{z'_y}\,\frac{\partial \chi}{\partial y}$$

– это операторы ковариантного дифференцирования, т.е. они переводят ковариантные дифференциальные выражения $\chi(z)$ в ковариантные.

Ясно, что если r – рациональный ковариант, то

$$J(r),\ D_x(J(r))\ D_y(J(r)),\dots$$

также рациональные коварианты. Положим

$$p = J(r),\ q_x = D_x(J(r)),\ q_y = D_y(J(r)),\ P = J(R),$$
$$Q_x = D_x(J(R)),\ Q_y = D_y(J(R)),\ X = a(x),\ Y = b(y).$$

В этих обозначениях из $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности $r(x,y)$ и $R(x,y)$ следует, что

$$\begin{gathered} R(X,Y) = r(x,y), \quad P(X,Y) = p(x,y), \\ Q_x(X,Y) = q_x(x,y), \quad Q_y(X,Y) = q_y(x,y). \end{gathered} \tag{6}$$

Эти четыре рациональных соотношения, избавляясь от знаменателей, можно записать как четыре полиномиальных соотношения

$$F_1(X,Y,x,y) = F_2(X,Y,x,y) = F_3(X,Y,x,y) = F_4(X,Y,x,y) = 0.$$

Пусть $H_1(X,x,y),\ H_2(X,x,y),\ H_3(X,x,y)$ – это результанты $(F_1,F_2),\ (F_1,F_3),\ (F_1,F_4)$ соответственно относительно переменной Y. Пусть, далее, $H_x(x,y)$ и $H_y(x,y)$– это результанты (H_1,H_2) и (H_1,H_3) относительно переменной X. Тогда соотношения $H_x(x,y) = H_y(x,y) = 0$ – это необходимые условия $\mathcal{G}_{xy}$-эквивалентности $r(x,y)$ и $R(x,y)$. Если положить $R(x,y) = r(y,x)$, то полученные условия – это условия квазикоммутативности функции r.

Пример 5. Пусть

$$r = \frac{kx^2+y}{1+y} + x, \quad R = \frac{kY^2+X}{1+X} + Y.$$

Вычисляя $H_1(X,x,y)$, получаем

$$4\,k^4\,(1+y)^3\left(kx^2-1\right)^2(1+X)^2\,(X-y)\times$$
$$\left(Xkx^2+Xxy+kx^2+Xx+yx+x+y+1\right) = 0.$$

Следовательно, при $k \neq 0$ функция r не является квазикоммутативной. С другой стороны, очевидно, что при $k=0$ она квазикоммутативной является.

На этом пути можно показать, что если рациональная функция зависит (рационально) от каких-либо параметров, то подмножество значений этих параметров, для которых функция квазикоммутативна, – полуалгебраично (определяется полиномиальными равенствами и неравенствами).

3. Квазиассоциативность

Пусть $F(x,y)$ – функция, голоморфная в некоторой области пространства $\mathbf{C}^2$. Если посмотреть на F как на бинарную операцию, то ее ассоциативность означает, что в некоторой области пространства в $\mathbf{C}^3$ выполнено соотношение

$$F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z)). \tag{7}$$

Абсолютно так же как на коммутативность мы можем посмотреть на другое важное свойство бинарных операций – ассоциативность.

Определение 6: Говорим, что функция $\varphi(x,y)$ *квазиассоциативна*, если найдутся три непостоянных аналитических функции одного переменного $g = (a,b,c) \in \mathcal{G}$, т.ч. $\psi(x,y) = g \cdot \varphi(x,y) = c(\varphi(a(x),b(y)))$ – ассоциативна, т.е. $\psi(\psi(x,y),z) = \psi(x,\psi(y,z)$ или

$$c(\varphi(a(c(\varphi(a(x),b(y)))),b(z))) = c(\varphi(a(x),b(c(\varphi(a(y),b(z)))))). \tag{8}$$

где (x,y,z) – три независимые переменные.

Для проверки того, что некая функция является квазикоммутативной, в соответствии с определением 1 надо найти три неизвестные функции (соотношение (1)). Но утверждение 2 показывает, что задача сводится к поиску одной функции. Аналогично для проверки квазиассоциативности требуется найти три функции (соотношение (8)). Покажем, что достаточно двух.

Утверждение 7: Функция $\varphi(x,y)$ квазиассоциативна тогда и только тогда, когда найдется пара непостоянных функций одного переменного (p,q), т.ч. $\psi(x,y) = p(\varphi(q(x),y))$ – ассоциативна, т.е.

$$\begin{aligned} \psi(\psi(x,y),z) = p \circ \varphi[q \circ p \circ \varphi(q(x),y),z] = \\ p \circ \varphi[q(x), p \circ \varphi(q(y),z)] = \psi(x,\psi(y,z)). \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство: Подставим в соотношении (8) $b^{-1}(x)$ вместо x, $b^{-1}(y)$ вместо y, $b^{-1}(z)$ вместо z. А также положим $p = b \circ c$ и $q = a \circ b^{-1}$. Получим соотношение (9).

Соотношение (9), очевидно, эквивалентно соотношению

$$\varphi[q \circ p \circ \varphi(q(x),y),z] = \varphi[q(x), p \circ \varphi(q(y),z)].$$

Если теперь заменить x на $q^{-1}(x)$, то получим

$$\varphi[q \circ p \circ \varphi(x,y),z] = \varphi[x, p \circ \varphi(q(y),z)]. \tag{10}$$

Количество неизвестных функций в соотношении (10) можно сократить еще на одну. Положим в (10) $y = y_0$, $z = z_0$. Будем использовать обозначения, введенные выше: $f^{y_0}_{\varphi}(x) = f^{y_0}(x) = \varphi(x,y_0)$. Получим $f^{z_0} \circ q \circ p \circ f^{y_0}(x) = f^{\zeta_0}(x)$ где $\zeta_0 = p(\varphi(y_0,z_0))$. Откуда следует, что $p = (q)^{-1} \circ (f^{z_0})^{-1} \circ f^{\zeta_0} \circ (f^{y_0})^{-1}$. В результате выражаем p через q.

Утверждение 8: Функция $x^2 + x\,y$ не является квазиассоциативной.
Доказательство: Запишем условие квазиассоциативности в форме (10). Получаем

$$\left(q\left(p\left(x^2+xy\right)\right)\right)^2 + q\left(p\left(x^2+xy\right)\right)z - x^2 - xp\left(\left(q\left(y\right)\right)^2 + q\left(y\right)z\right) = 0. \quad (11)$$

Учитывая, что $q(y)$ не есть тождественный ноль, обозначим $X = x^2 + x\,y$, $Z = q(y)^2 + q(y)\,z$, тогда $x = (\sqrt{y^2+4\,X} - y)/2$. Т.е. мы от переменных (x, y, z) переходим к переменным (X, y, Z), и (11) примет вид

$$\left(q\left(p\left(X\right)\right)\right)^2 + q\left(p\left(X\right)\right)z - \left(-y/2 + 1/2\,\sqrt{y^2+4\,X}\right)^2 - \left(-y/2 + 1/2\,\sqrt{y^2+4\,X}\right)p\left(Z\right) = 0.$$

Продифференцируем полученное выражение по y, получаем

$$\left(-y + \sqrt{y^2+4\,X}\right)\left(-y + \sqrt{y^2+4\,X} + p\left(Z\right)\right) = 0.$$

Это невозможно, т.е. таких p и q не существует. Утверждение доказано.

4. Об ассоциативных аналитических функциях

В соответствии с нашими определениями семейство квазикоммутативных функций – это $\mathcal{G}$-орбита семейства коммутативных функций, а семейство квазиассоциативных функций – это $\mathcal{G}$-орбита семейства ассоциативных функций.

Нетрудно дать описание совокупности коммутативных функций. В алгебре $\mathbf{C}[x,y]$ сходящихся степенных рядов от (x,y) ряды, инвариантные относительно транспозиции T представляют собой подалгебру и, в частности, линейное подпространство. Всякий ряд из $\mathbf{C}[x,y]$ можно представить в виде суммы коммутативной и антикоммутативной компоненты.

$$z(x,y) = z^{+}(x,y) + z^{-}(x,y) = \frac{z(x,y) + Tz(x,y)}{2} + \frac{z(x,y) - Tz(x,y)}{2}.$$

Соответственно, $P^{+} = (Id + T)/2$, $P^{-} = (Id - T)/2$ – это проекторы $\mathbf{C}[x,y]$ на $\mathbf{C}[x,y]^{+}$ и на $\mathbf{C}[x,y]^{-}$, подпространства коммутативных и антикоммутативных функций. В частности, $\mathbf{C}[x,y]^{+}$, совокупность коммутативных степенных рядов, – это бесконечномерное линейное пространство.

А что нам известно о строении совокупности ассоциативных аналитических функций, т.е. функций, удовлетворяющих условию (7)?

Очевидно, что это не линейное пространство и не конус.

Утверждение 9. (a) Все ассоциативные полиномы $P(x,y)$ степени не выше чем два присутствуют в следующем списке:
$P_1 = p + pq(x+y) + q\,(pq-1)\;xy,\ P_2 = (x+y) + qxy,\ P_3 = x,\ P_4 = y.$

(b) Все полиномы из этого списка содержатся в Cl^1.
Доказательство: Подставляем общий полином степени не выше двух в (7), решаем полученную систему уравнений на коэффициенты и получаем приведенный выше набор решений. Это доказывает (a). Полиномы P_3 и P_4 содержатся в Cl^0. Подставляя полиномы P_1 и P_2 в уравнение, определяющее Cl^1, убеждаемся, что оно выполнено. Это доказывает (b).

И.В. Маресин заметил, что если в соотношении $w = F(x,y)$ сделать произвольную локально обратимую замену

$$\begin{gathered} x \to \alpha(x), \quad y \to \alpha(y), \quad w \to \alpha(w), \quad \text{т.е.} \\ F(x,y) \to (\alpha)^{-1}(F(\alpha(x),\alpha(y)) = M_\alpha(F(x,y)), \end{gathered} \tag{12}$$

то свойство (7) ассоциативности функции F сохранится. Преобразования вида (12) – это некоторая псевдоподгруппа в $\mathcal{G}$, которую мы обозначим $\mathcal{M}$.

Утверждение 10. Действие $\mathcal{M}$ сохраняет как ассоциативность, так и сложность.
Доказательство: Непосредственная проверка.

Утверждение 11.
(a) Полиномы P_1 и P_2 из утверждения 8 принадлежат $\mathcal{M}$-орбите $(x+y)$ или 0.
(b) Полный список ассоциативных полиномов степени не выше чем два по модулю $\mathcal{M}$-действия имеет следующий вид: $\quad 0, \quad x, \quad y, \quad (x+y)$.
Доказательство: Пусть $q \neq 0$, применяя к P_2 преобразование M_α при $\alpha(t) = t\,q^{-1}$, получаем $x + y + x\,y$. Полагая $\alpha(t) = t - 1$ и применяя к $x + y + x\,y$ преобразование M_α, получаем $x\,y$. Полагая $\alpha(u) = \exp(u)$, получаем $M_{\exp}(x\,y) = x + y$.

Теперь рассмотрим P_1. Пусть $p\,q = 1$, т.е. $P_1 = p + x + y$. Применяя преобразование M_α при $\alpha(t) = t - p$, получаем $x + y$. Если $p\,q \neq 1$, то применяя M_α при $\alpha(t) = t + p/(1-pq)$, получаем $q\,(pq-1)\,xy$. Если $q = 0$, то $F_1 = 0$, в противном случае полагая $\alpha(t) = t\,(q(pq-1))^{-1}$, получаем $x\,y$ и, далее, $x + y$.

Утверждение 12. Пусть аналитическая функция $F(x,y)$ ассоциативна (т.е. удовлетворяет (7)). Тогда
(a) $N(F) = 0 \;\Leftrightarrow$ либо $F(x,y) = const$, либо $F = x$, либо $F = y$,
(b) $N(F) = 1 \;\Leftrightarrow F(x,y) = \alpha^{-1}(\alpha(x) + \alpha(y))$, где $\alpha(t) \neq const$.
Доказательство: Пусть $N(F) = 0$. Если $F = const$, то соотношение (7), очевидно, выполнено. Пусть $F = F(x)$, где F – непостоянна, тогда (7) принимает вид $F(F(x)) = F(x)$. Для непостоянной функции это означает, что $F(x) = x$. Аналогично, если $F = F(y)$, то (7) принимает вид $F(z) = F(F(z))$, откуда следует, что $F(y) = y$. Это доказывает (a).

Пусть $N(F) = 1$, т.е $F(x,y) = c(a(x) + b(y))$, где все три функции одного переменного непостоянны. Применим преобразование $M_{b^{-1}}$ к $c(a(x)+$

$b(y))$ и сменим обозначения. А именно, $a(b^{-1})$ на a и $b(c)$ на c. Тогда функция примет вид $F = c(a(x) + y)$. Записывая для нее соотношение (7), получим

$$E = c\,(a\,(x) + c\,(a\,(y) + z)) - c\,(a\,(c\,(a\,(x) + y)) + z) = 0 \tag{13}$$

Применим к этому соотношению дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x} - a'(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

После сокращения на ненулевой множитель $c'(a(x) + c(a(y) + z))\,a'(x)$ получим $c'(a\,(y) + z)\,a'(y) = 1$. Откуда сразу получаем, что c' и a' – постоянны, т.е $a(x) = \lambda\, x + \mu,\ c(u) = u/\lambda + \nu$. Подставляя эти a и c в (7), получим

$$E = \frac{(-\lambda + 1)\, z - \lambda^2\nu - \mu\lambda + \nu\lambda + \mu}{\lambda^2} = 0.$$

Откуда следует, что $\lambda = 1$ и мы получаем $F(x, y) = (x+y)+p$. Применяя преобразование M_α при $\alpha(t) = t - p$, получаем $x+y$. Это доказывает (b).

В заключение – вопрос.

Вопрос 13. Существуют ли ассоциативные функции сложности выше чем один?

Если нет, то полученное нами описание ассоциативных функций двух переменных является полным.

References

[1] A. N. Kolmogorov, “On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 114:5 (1957), 953–956

[2] A. G. Vitushkin, "O mnogomernykh variatsiyakh. — M.: GTTI, 1955.

[3] V.I.Arnold, Nekotorye voprosy priblizhenija i predstavlenija funktsii (1958), V sbornike "K 60-letiju V.I.Arnolda M.Fazis, 770 s, 1997.

[4] A. G. Vitushkin, “On Hilbert’s thirteenth problem and related questions”, Uspekhi Mat. Nauk, 59:1(355) (2004), 11–24; Russian Math. Surveys, 59:1 (2004), 11–25.

[5] V.K.Beloshapka, “Analytic complexity of functions of two variables”, Russian Journal of Mathematical Physics, 14:3 (2007), 243–249.

[6] V.K.Beloshapka, Stabilizer of a Function in the Gage Group, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 24, No. 2, 2017, 1–10.

Beloshapka Valerii Konstantinovich

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Math. and Mech., Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics

Vorob’evy Gory, 1,

119991 Moscow, Russia

Email address: vkb@strogino.ru