

## НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА

М.К. Турцынский 

*Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** We study inhomogeneous non-strictly hyperbolic systems of two equations, which are a formal generalization of the transformed one-dimensional Euler-Poisson equations. For such systems, a complete classification of the behavior of the solution is carried out depending on the right side. In particular, criteria for the formation of singularities in the solution of the Cauchy problem in terms of initial data are found. Also we determine the domains of attraction of equilibria of the extended system for derivatives. We prove the existence of solutions in the form of simple waves. The results obtained are applied to study the main model cases of the Euler-Poisson equations.

**Keywords:** Nonstrictly hyperbolic systems, Euler-Poisson equations, singularity formation.

### 1 Введение

Уравнения Эйлера-Пуассона без давления, имеющие важные приложения в астрофизике и физике полупроводников, в одномерном случае

---

TURZYNSKY, M.K., NONSTRICTLY HYPERBOLIC SYSTEMS.

© 2023 Турцынский М.К..

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00056) через РУДН.

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

имеют вид

$$n_t + nn_x = 0, \quad V_t + VV_x = -k\Phi_x - \gamma V, \quad \Delta\Phi = n - N, \quad (1)$$

где  $n(t, x)$  – плотность,  $V(t, x)$  – скорость,  $\Phi(t, x)$  – потенциал некоторой силы. Здесь  $k$  – константа, определяющая, является ли потенциал отталкивающим ( $k = -1$ ) или притягивающим ( $k = 1$ );  $N$  – постоянная нормализованная фоновая плотность, равная 0 или 1 в зависимости от модели;  $\gamma \geq 0$  – постоянный коэффициент трения, который, например, может быть интерпретирован как коэффициент линейного трения. Такие уравнения были рассмотрены в [4], где в терминах начальных данных

$$(n(0, x), V(0, x)) = (n_0(x), V_0(x)) \in C^1(\mathbb{R}) \quad (2)$$

были получены точные условия, при которых решение задачи Коши теряет гладкость за конечное время. Методы получения таких условий были весьма громоздки и предполагали индивидуальное исследование для каждого набора коэффициентов.

Значительно позднее в [10] была решена аналогичная задача для уравнений холодной плазмы, которые могут быть получены из системы (1) при  $k = -1$ ,  $N = 1$ ,  $\gamma = 0$ . Оказалось, что после преобразования системы методы ее исследования значительно упрощаются из-за возможности сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Впоследствии была выработана техника, основанная на теореме Радона, которая позволила успешно исследовать системы, связанные с исходной системой холодной плазмы. Это, например, плазма с учетом электронно-ионных соударений (фактически случай  $\gamma > 0$ ) [9], плазма во внешнем магнитном поле [10], [3], многомерная осесимметричная модель холодной плазмы [8].

Проведем процедуру сведения системы (1) к нестрого гиперболической системе квазилинейных уравнений. Для этого введем новую неизвестную функцию  $E = -\Phi_x$ , из третьего уравнения (1) получим  $n = N - E_x$  и подставим это равенство в первое уравнение (1). Получим систему

$$V_t + VV_x = kE - \gamma V, \quad E_t + VE_x = NV \quad (3)$$

с начальными условиями

$$(V(0, x), E(0, x)) = (V_0(x), E_0(x)), \quad (4)$$

где  $E_0$  связано с  $n_0$  условием  $(E_0)_x = N - n_0(x)$ .

Систему (3) можно записать в эквивалентном виде, введя для краткости  $\mathbf{V} = (V_1, V_2)^T$ ,  $V_1 = V$ ,  $V_2 = E$  как

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V_1 \mathbb{E} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = Q \mathbf{V}, \quad (5)$$

где  $\mathbb{E}$  – единичная матрица размера  $2 \times 2$ ,  $Q = \begin{pmatrix} -\gamma & k \\ N & 0 \end{pmatrix}$  – постоянная матрица размера  $2 \times 2$ . К системе (5) сводятся многие важные модели физики и гемодинамики (например, [7]).

Система (5) является нестрого гиперболической и имеет локально по времени решение, обладающее той же гладкостью, что и начальное условие [2]. Отметим, что (5) является частным случаем нестрого гиперболической системы двух уравнений для  $\mathbf{V} = (V_1, V_2)^T$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V_1 \mathbb{E} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = Q \mathbf{V} \quad (6)$$

с произвольной постоянной матрицей  $Q$ , где  $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Мы будем рассматривать начальные данные вида

$$\mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0(x) \in C^2(\mathbb{R}).$$

Повышенная гладкость начальных данных связана с тем, что техника доказательств требует рассмотрения расширенной системы на производные.

В настоящей статье мы покажем, что существует стандартная процедура нахождения критериев возникновения особенностей решений задачи Коши для (6) в терминах начальных данных. Эта процедура состоит в составлении квадратично-нелинейной расширенной системы для производных и ее линейризации при помощи теоремы Радона (теорема 1 раздела 2, подробнее см. [5], [6]). Пользуясь возможностью нахождения аналитического решения расширенной системы, в разделе 3 мы проведем полную классификацию поведения решения задачи Коши в зависимости от матрицы  $Q$ . В разделе 4 мы исследуем устойчивость особых точек расширенной системы. В разделе 5 мы покажем, что все системы вида (6) обладают подклассами решений типа простых волн. В частности, для уравнений Эйлера-Пуассона эти подклассы могут быть найдены явно и для них система сводится к одному уравнению. В разделе 5 мы исследуем особые точки расширенной системы на производные и классифицируем их устойчивость. Мы покажем, что начальные данные, отвечающие глобально гладким решениям задачи Коши, обладают тем свойством, что в каждой точке действительной оси пара производных начальных данных (начальные данные расширенной системы) попадают в область притяжения конечной особой точки. Критерии возникновения особенностей, полученные в разделе 3, позволяют точно описать области притяжения особых точек. В заключительном, 6 разделе мы применяем полученные результаты к исходной системе уравнений Эйлера-Пуассона (1) для основных модельных случаев и показываем, что критерии из статьи [4] могут быть получены гораздо более простым и универсальным способом. Кроме того, мы исследуем асимптотическое поведение решения при больших  $t$ , и графически изображаем области, в которой

должны находиться производные начальных данных для того, чтобы решение сохранило глобальную гладкость (для  $\gamma = 0$ ).

## 2 Критерии образования особенностей в терминах определяющей функции

Основным преимуществом рассмотрения системы (6) является возможность найти её решение вдоль характеристик  $\dot{x}(t) = V$ , то есть свести задачу к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, компоненты решения удовлетворяют линейной системе

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = Q\mathbf{V}, \quad \frac{dx}{dt} = V \quad (7)$$

с начальным условием

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0(x_0), \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Если мы продифференцируем систему (6) по  $x$ , то вдоль характеристик  $\frac{dx}{dt} = V$ ,  $x(0) = x_0$  мы получим расширенную квадратично-нелинейную систему на производные  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ,  $v_1 = V_x$ ,  $v_2 = E_x$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -v_1\mathbf{v} + Q\mathbf{v}. \quad (9)$$

Чтобы упростить для дальнейшего исследования систему (9), мы приведем матрицу  $Q$  к жордановой нормальной форме. Хорошо известно, что существует такая невырожденная матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , что  $AQA^{-1} = J$ , где  $J$  – жорданова нормальная форма матрицы  $Q$ . Таким образом, введя новые неизвестные функции

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)^T \quad (10)$$

мы можем переписать систему (9) в виде

$$\dot{\mathbf{w}} = -v_1\mathbf{w} + J\mathbf{w}, \quad (11)$$

где  $v_1 = \frac{1}{\det A}(a_{22}w_1 - a_{12}w_2)$ .

Основным инструментом дальнейшего исследования будет служить следующая теорема ([5], [6]):

**Теорема 1.** (Лемма Радона) *Матричное уравнение Риккати*

$$\dot{W} = M_{21}(t) + M_{22}(t)W - WM_{11}(t) - WM_{12}(t)W \quad (12)$$

( $W = W(t)$  – матрица размера  $n \times t$ ,  $M_{21}$  – матрица размера  $n \times t$ ,  $M_{22}$  – матрица размера  $t \times t$ ,  $M_{11}$  – матрица размера  $n \times n$ ,  $M_{12}$  – матрица размера  $t \times n$ ) эквивалентна однородному линейному матричному уравнению

$$\dot{Y} = M(t)Y, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (13)$$

( $Y = Y(t)$  – матрица размера  $n \times (n + m)$ ,  $M$  – матрица размера  $(n + m) \times (n + m)$ ) в следующем смысле.

Пусть на некотором интервале  $I \in \mathbb{R}$  матричная функция  $Y(t) = \begin{pmatrix} R(t) \\ S(t) \end{pmatrix}$  ( $R(t)$  – матрица размера  $n \times n$ ,  $S(t)$  – матрица размера  $n \times m$ ) является решением системы (13) с начальным условием

$$Y(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ W_0 \end{pmatrix}$$

( $\mathbb{E}$  – единичная матрица размера  $n \times n$ ,  $W_0$  – постоянная матрица размера  $n \times m$ ) и  $\det R \neq 0$ . Тогда  $W(t) = S(t)R^{-1}(t)$  – решение (12) с начальным условием  $W(0) = W_0$  на  $I$ .

Для того, чтобы применить эту теорему, перепишем систему (11) в матричном виде (12). Тогда

$$W = \mathbf{w}, \quad M_{11} = (0), \quad M_{12} = \left( \frac{a_{22}}{\det A} - \frac{a_{12}}{\det A} \right), \quad M_{21} = (0 \ 0)^T, \quad M_{22} = J.$$

Таким образом, мы получаем задачу Коши для линейной системы на матрицы  $R(t) = (q(t))$ ,  $S(t) = (u_1(t) \ u_2(t))^T$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{22}}{\det A} & -\frac{a_{12}}{\det A} \\ 0 & j_{11} & j_{12} \\ 0 & j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q(0) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где  $J = (j_{ik})$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 1, 2$ ;  $v_1(0) = V_x(x_0)$ ,  $v_2(0) = E_x(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Заметим, что образование особенности для гиперболических систем означает обращение в бесконечность или решения, или его первых производных [2]. Мы видим, что у решения, описываемого линейной системой (7) с начальным условием (8), не образуется особенность. Далее, из теоремы Радона следует, что  $\mathbf{w}(t) = \left( \frac{u_1(t)}{q(t)}, \frac{u_2(t)}{q(t)} \right)$ . Значит, у производных решения особенность образуется тогда и только тогда, когда  $q(t)$  – часть решения системы (14) – обращается в ноль на положительной полуоси ( $q(t)$  мы будем далее называть *определяющей функцией*). Мы можем сформулировать этот результат в виде следующей теоремы:

**Теорема 2.** 1. Поведение решения задачи Коши (3), (4) вдоль характеристик может быть полностью описано динамикой линейных систем (7) и (14).

2. Решение задачи Коши (3), (4) остается гладким для всех  $t > 0$  тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x_0 \in \mathbb{R}$  определяющая функция  $q(t)$  не обращается в ноль для всех  $t > 0$ .

3. Если существует точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  такая, что для некоторого конечного значения  $t_* > 0$  имеет место  $q(t_*) = 0$ , то у решения задачи

Коши (3), (4) образуется особенность за конечное время. Точный момент времени  $T_*$ , в который происходит формирование особенности, можно найти по формуле  $T_* = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \{t_* > 0 \mid q(t_*) = 0\}$ .

Система (14) является линейной однородной системой с постоянными коэффициентами, поэтому её можно явно решить, что позволяет получить необходимые и достаточные условия для образования особенностей решения в более явном, чем в Теореме 2, виде. В следующем параграфе мы исследуем, в каких случаях возникают/не возникают пересечения графика функции  $q(t)$  с осью  $Ot$  при  $t > 0$  в зависимости от матрицы  $Q$  и тем самым получим полную классификацию возможного поведения решения при всех возможных матрицах  $Q$ .

### 3 Формулировка теорем о формировании особенности в терминах исходной системы

**3.1. Нахождение компонент решения системы (14).** Итак, в предыдущем разделе мы перешли от матрицы  $Q$  к ее жордановой форме  $J$ , сделав преобразование  $J = AQA^{-1}$ . Очевидно, чтобы найти решение  $q(t)$  системы (14), нам нужно первоочередно разрешить систему

$$\dot{\mathbf{u}} = J\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \tag{15}$$

и затем найти  $q(t)$ , интегрируя уравнение  $\dot{q} = \frac{a_{22}}{\det A}u_1 - \frac{a_{12}}{\det A}u_2$ . Жордановы формы матрицы  $Q$  могут быть всего лишь трех различных видов, что упростит нам исследование далее.

Хорошо известно, что матрицу  $Q$  размера  $2 \times 2$  невырожденным линейным преобразованием можно привести к одному из следующих видов:

- A.  $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ;
- B.  $J_B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- C.  $J_C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ .

Таким образом, получаем следующее предложение, в котором находим точные решения  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  системы (15) в зависимости от вида  $J$  (его доказательство опущено в силу очевидности).

**Предложение 1.** Введём:  $\lambda_1, \lambda_2$  – собственные значения матрицы  $Q$ , которые удовлетворяют уравнению  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ .

1. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны, и для каждого из них имеется столько независимых собственных векторов, какова кратность этого собственного значения. Тогда решение системы (15) имеет вид  $u_1(t) = \tilde{C}_1 \exp(\lambda_1 t)$ ,  $u_2(t) = \tilde{C}_2 \exp(\lambda_2 t)$ .
2. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны, совпадают и при этом для них имеется только один собственный вектор, то решение системы

(15) имеет вид  $u_1(t) = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) \exp(\lambda t)$ ,  $u_2(t) = \tilde{C}_2 \exp \lambda t$ , где  $\lambda = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ .

3. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно сопряженные собственные значения, то решение системы (15) имеет вид  $u_1(t) = \exp(\alpha t) (\tilde{C}_1 \sin \beta t + \tilde{C}_2 \cos \beta t)$ ,  $u_2(t) = \exp(\alpha t) (-\tilde{C}_2 \sin \beta t + C_1 \cos \beta t)$ , где  $\alpha = \Re(\lambda_1)$ ,  $\beta = \Im(\lambda_1)$  и  $\Im(\lambda_1) > 0$ .

В пунктах 1, 2 константы  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  связаны с начальными данными как

$$(\tilde{C}_1 \ \tilde{C}_2) = (v_1(0) \ v_2(0))A^T.$$

В пункте 3 константы  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  связаны с начальными данными как

$$(\tilde{C}_2 \ \tilde{C}_1) = (v_1(0) \ v_2(0))A^T.$$

**3.2. Случай А (матрица  $J_A$  диагональна).** Определим константы  $C_1, C_2$  в терминах начальных данных  $v_1(0)$  и  $v_2(0)$  следующим образом:

$$C_1 = \frac{a_{22}}{\det A} (a_{11}v_1(0) + a_{12}v_2(0)), \quad C_2 = -\frac{a_{12}}{\det A} (a_{21}v_1(0) + a_{22}v_2(0)). \quad (16)$$

Заметим, что константы здесь и ниже, в пунктах 3.3 и 3.4, определяются единственным образом. Для того, чтобы найти функцию  $q(t) = \int u_1(t) dt = \int (C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)) dt$ ,  $q(0) = 1$ , нам нужно рассмотреть три различных ситуации:

1. если  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ , то

$$q(t) = \frac{C_1}{\lambda_1} (\exp(\lambda_1 t) - 1) + \frac{C_2}{\lambda_2} (\exp(\lambda_2 t) - 1) + 1;$$

2. если  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ , то

$$q(t) = C_1 t + \frac{C_2}{\lambda_2} (\exp(\lambda_2 t) - 1) + 1;$$

3. если  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , то

$$q(t) = \frac{C_1}{\lambda_1} (\exp(\lambda_1 t) - 1) + C_2 t + 1.$$

Мы докажем далее последовательно четыре следствия из Теоремы 2 для ситуаций, описанных выше. Заметим также, что случай 3 можно не рассматривать отдельно, так как заменой  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$  он сводится к случаю 2. В следствии 1 рассмотрена ситуация различных, но ненулевых собственных значений; в следствии 2 – ситуация одинаковых и ненулевых собственных значений, в следствиях 3 и 4 – ситуация одного нулевого и одного ненулевого собственного значения.

**Следствие 1.** Пусть  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (16). Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда имеет место одна из следующих ситуаций:

1. в случае  $\lambda_1 > 0$   
а.  $C_1 < 0$ ;

- b.  $C_1 > 0, C_2 < 0, C_1 + C_2 < 0, C_1(-C_1^{-1}C_2)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) + 1 - \frac{C_1}{\lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda_2} \leq 0;$
  - c.  $C_1 = 0, C_2 < 0, \lambda_2 > 0;$
  - d.  $C_1 = 0, C_2 < \lambda_2, \lambda_2 < 0;$
2. в случае  $\lambda_1 < 0$
- a.  $C_1 > 0, C_2 < 0, C_1 + C_2 < 0, C_1(-C_1^{-1}C_2)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) + 1 - \frac{C_1}{\lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda_2} \leq 0;$
  - b.  $C_1 < 0, \frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} > 1;$
  - c.  $C_1 = 0, C_2 < 0, \lambda_2 > 0;$
  - d.  $C_1 = 0, C_2 < \lambda_2, \lambda_2 < 0.$

*Доказательство.* Будем поочередно перебирать случаи. Заметим предварительно, что

$$q'(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad q'(0) = C_1 + C_2. \quad (17)$$

I. Рассмотрим сначала ситуацию, когда  $\lambda_1 > 0$  (и ни одна из констант  $C_1$  или  $C_2$  не обнулилась). В этом случае имеем также  $q(t) \sim \frac{C_1}{\lambda_1} \exp(\lambda_1 t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

1. Если обе константы  $C_1 > 0$  и  $C_2 > 0$ , то в силу первого равенства (17)  $q'(t) > 0$  и функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ . Точек пересечения с положительной полуосью нет.

2. Пусть  $C_1 > 0, C_2 < 0$ . Тогда функция  $q(t)$  обязательно имеет точку экстремума  $t_{extr}$ , которая находится из равенства  $q'(t) = 0$ , откуда  $t_{extr} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$ . Мы видим, что  $t_{extr} > 0$  тогда и только тогда, когда  $C_1 + C_2 < 0$ . В противном случае, когда  $C_1 + C_2 \geq 0$  и точка экстремума не находится на положительной полуоси, из второго равенства (17) мы видим, что  $q'(0)$  неотрицательна и значит функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ . Точек пересечения её графика с осью  $Ot, t > 0$  нет. Вернёмся к ситуации, когда  $C_1 + C_2 < 0$ . В этом случае, так как  $q(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  найденная точка экстремума, является точкой минимума. Значение функции в ней равно

$$q(t_{extr}) = C_1(-C_1^{-1}C_2)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) + 1 - \frac{C_1}{\lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda_2} \quad (18)$$

и оно должно быть неположительно, чтобы возникла точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . В противном случае точек пересечения графика  $q(t)$  с положительной полуосью нет.

3. Если  $C_1 < 0$ , то  $q(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому обязательно будет точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ .

II. Рассмотрим далее ситуацию, когда  $\lambda_1 < 0$  (и ни одна из констант  $C_1$  или  $C_2$  не является нулём). В этом случае имеем также:  $q(t) \sim (1 - \frac{C_1}{\lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda_2})$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

1. Если обе константы  $C_1 > 0$  и  $C_2 > 0$ , то в силу первого равенства (17)  $q'(t) > 0$  и функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ . Точек пересечения её графика с положительной полуосью нет.

2. Пусть  $C_1 > 0$ ,  $C_2 < 0$ . Тогда функция  $q(t)$  обязательно имеет точку экстремума  $t_{extr}$ , которая находится из равенства  $q'(t) = 0$ , откуда  $t_{extr} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$ . Мы видим, что  $t_{extr} > 0$  тогда и только тогда, когда  $C_1 + C_2 < 0$ . В противном случае  $C_1 + C_2 \geq 0$  и точка экстремума не лежит справа от оси  $Oq$ , так как из второго равенства (17) мы видим, что  $q'(0)$  неотрицательна и значит функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ . Точек пересечения её графика с положительной полуосью нет. Вернемся к ситуации, когда  $C_1 + C_2 < 0$ . В этом случае найденная точка экстремума является точкой минимума, так как в силу второго равенства (17)  $q'(0) < 0$ . Значение функции в ней равно (18) и оно должно быть неположительно, чтобы возникла точка пересечения графика  $q(t)$  с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . В противном случае точек пересечения с осью  $Ot$ ,  $t > 0$  нет.

3. Пусть теперь  $C_1 < 0$ ,  $C_2 > 0$ . Функция  $q(t)$  имеет точку экстремума  $t_{extr} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$ , которая является положительной, если  $C_1 + C_2 > 0$ . Обратим внимание, что  $t_{extr}$  является в этом случае точкой максимума, так как в силу второго равенства (17)  $q'(0) > 0$ . Таким образом, чтобы график  $q(t)$  имел точку пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \left(1 - \frac{C_1}{\lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda_2}\right) < 0, \quad (19)$$

так как на участке от  $t_{extr}$  до  $+\infty$  функция  $q(t)$  убывает. Если же  $C_1 + C_2 \leq 0$ , то в силу второго равенства (17) функция  $q(t)$  убывает при  $t > 0$ . Таким образом, график функции  $q(t)$  имеет точку пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда выполняется условие (19), в противном случае пересечения нет.

4. Наконец, пусть  $C_1 < 0$ ,  $C_2 < 0$ . В этом случае в силу первого равенства (17)  $q'(t) < 0$  и  $q(t)$  убывает всюду при  $t > 0$ . Таким образом, если  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \left(1 - \frac{C_1}{\lambda_1} - \frac{C_2}{\lambda_2}\right) < 0$ , то график функции  $q(t)$  имеет точку пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ , в противном случае пересечения нет.

III. Далее рассмотрим ситуацию, когда какая-то из констант  $C_1$  или  $C_2$  оказалась нулём. Начнём со случая  $C_1 = 0$ , тогда  $q(t) = \frac{C_2}{\lambda_2}(\exp(\lambda_2 t) - 1) + 1$ ,  $q'(t) = C_2 \exp(\lambda_2 t)$ .

1. Пусть  $\lambda_2 > 0$ . Тогда если  $C_2 \geq 0$ , то точек пересечения графика  $q(t)$  с положительной полуосью нет, функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ , так как производная  $q'(t)$  положительна. Если  $C_2 < 0$ , то функция  $q(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и следовательно, точка пересечения есть.

2. Пусть  $\lambda_2 < 0$ . Тогда если  $C_2 \geq 0$ , то точек пересечения графика  $q(t)$  с положительной полуосью нет, функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ , так как производная  $q'(t)$  положительна. Если  $C_2 < 0$ , то функция  $q(t)$

убывает при  $t > 0$ , так как производная  $q'(t)$  отрицательна и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \left(1 - \frac{C_2}{\lambda_2}\right)$ . Отсюда, если  $C_2 < \lambda_2$ , то искомая точка пересечения есть, в противном случае, если  $C_2 \geq \lambda_2$ , её нет.

3. Для ситуации, в которой  $C_2 = 0$ , а  $C_1$  не равно нулю, получаем те же условия из пунктов 1 и 2 с точностью до замены  $C_1$  на  $C_2$  и  $\lambda_1$  на  $\lambda_2$ . Следствие доказано. В формулировке следствия некоторые из рассмотренных в доказательстве подпунктов были объединены, чтобы получить более компактное условие на формирование особенности.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (16). Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1.  $\lambda > 0, C_1 + C_2 < 0$ ;
2.  $\lambda < 0, C_1 + C_2 < \lambda$ .

*Доказательство.* В случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$  решение системы (9) имеет вид:  $q(t) = \frac{C_1 + C_2}{\lambda}(\exp(\lambda t) - 1) + 1$ , причем  $q'(t) = (C_1 + C_2)\exp(\lambda t)$ .

Пусть  $\lambda > 0$ . Тогда если  $(C_1 + C_2) \geq 0$ , то точки пересечения графика  $q(t)$  с положительной полуосью нет, так как производная  $q'(t)$  неотрицательна. Если же  $(C_1 + C_2) < 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = -\infty$ , и обязательно будет точка пересечения.

Пусть  $\lambda < 0$ . Тогда если  $(C_1 + C_2) \geq 0$ , то точки пересечения графика  $q(t)$  с положительной полуосью нет, так как производная  $q'(t)$  неотрицательна. Если же  $(C_1 + C_2) < 0$ , то функция  $q(t)$  убывает и  $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = 1 - \frac{C_1 + C_2}{\lambda}$ . Если этот предел отрицателен, то будет точка пересечения, в противном случае её нет.

Следствие доказано.  $\square$

**Следствие 3.** Пусть  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (16). Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1.  $C_1 < 0$ ;
2.  $C_1 = 0, C_2 < 0$ ;
3.  $C_1 > 0, C_2 < 0, C_1 + C_2 < 0, \lambda_1 + C_2 \ln\left(-\frac{C_2}{C_1}\right) \leq C_1 + C_2$ .

*Доказательство.* Если  $C_1 < 0$ , то  $q(t) \sim \frac{C_1}{\lambda_1} \exp(\lambda_1 t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и так как  $q(0) = 1$ , то в силу непрерывности функции  $q(t)$  будет иметься точка пересечения её графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$ .

Если  $C_1 = 0$ , то  $q(t) = 1 + C_2 t$ , и  $q(t) \rightarrow -\infty$  тогда и только тогда, когда  $C_2 < 0$ . Так как  $q(0) = 1$ , то в силу непрерывности  $q(t)$  будет иметься точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . Если  $C_2 \geq 0$ , таких точек пересечения нет.

Пусть  $C_1 > 0$ , тогда  $q'(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2$ . Очевидно, что если  $C_2 \geq 0$ , то производная будет положительна и не будет точек пересечения графика  $q(t)$  с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . Если же  $C_2 < 0$ , то  $q(t)$  обязательно имеет точку минимума, определяемую соотношением  $t_{min} = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left( -\frac{C_2}{C_1} \right)$ . Нам нужно, чтобы эта точка лежала справа от нуля, т.е. должно выполняться  $\frac{1}{\lambda_1} \ln \left( -\frac{C_2}{C_1} \right) > 0$ , откуда  $C_1 + C_2 < 0$ . Если это условие не выполнено, то  $q'(0) = C_1 + C_2 \geq 0$ , т.е. при  $t > 0$  функция  $q(t)$  возрастает и нет точек пересечения её графика с положительной полуосью. Вычислим далее  $q(t_{min}) = 1 + \frac{C_2}{\lambda_1} \ln \left( -\frac{C_2}{C_1} \right) - \frac{C_1 + C_2}{\lambda_1}$ . Чтобы существовала точка пересечения графика  $q(t)$  с осью  $Ot$  при  $t > 0$  (в случае  $C_1 + C_2 < 0$ ), необходимо и достаточно потребовать, чтобы  $q(t_{min}) \leq 0$ , откуда получаем условие 3 следствия.

Следствие доказано.  $\square$

**Следствие 4.** Пусть  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (16). Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1.  $C_1 < 0$ ;
2.  $C_1 = 0, C_2 < \lambda_2$ ;
3.  $C_1 > 0, C_2 < 0, C_1 + C_2 < 0, \lambda_2 + C_1 \ln \left( -\frac{C_1}{C_2} \right) \geq C_1 + C_2$ .

*Доказательство.* Если  $C_1 < 0$ , то  $q(t) \sim C_1 t \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Так как  $q(0) = 1$ , в силу непрерывности функции  $q(t)$  будет обязательно иметься точка пересечения её графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$ .

Если  $C_1 = 0$ , то  $q(t) = 1 + \frac{C_2}{\lambda_2} (\exp(\lambda_2 t) - 1)$  и  $q'(t) = C_2 \exp(\lambda_2 t)$ . Если  $C_2 > 0$ , то  $q'(t)$  положительна и  $q(t)$  возрастает, значит нет точек пересечения её графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . Если  $C_2 = 0$ , то  $q(t) \equiv 1$ , также нет точек пересечения с положительной полуосью. Если  $C_2 < 0$ , то функция  $q(t)$  всюду убывает и стремится к значению  $q_{inf} = 1 - \frac{C_2}{\lambda_2}$  при  $t \rightarrow +\infty$  и значит, будет иметься точка пересечения графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда это значение  $q_{inf}$  будет отрицательно. Отсюда получаем условие из пункта 2 теоремы.

Пусть  $C_1 > 0$ , тогда  $q'(t) = C_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t)$ . Очевидно, что если  $C_2 \geq 0$ , то производная будет положительна и не будет точек пересечения графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . Если же  $C_2 < 0$ , то  $q(t)$  обязательно имеет точку минимума, определяемую соотношением  $t_{min} = \frac{1}{\lambda_2} \ln \left( -\frac{C_1}{C_2} \right)$ . Нам нужно, чтобы эта точка лежала справа от нуля, т.е. должно выполняться  $\frac{1}{\lambda_2} \ln \left( -\frac{C_1}{C_2} \right) > 0$ , откуда  $C_1 + C_2 < 0$ . Если это условие не выполнено, то  $q'(0) = C_1 + C_2 \geq 0$ , т.е. при всех  $t > 0$  функция  $q(t)$  возрастает и нет точек пересечения с положительной полуосью. Вычислим далее

$q(t_{min}) = 1 + \frac{C_1}{\lambda_2} \ln\left(-\frac{C_1}{C_2}\right) - \frac{C_1+C_2}{\lambda_2}$ . Чтобы существовала точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$  (в случае  $C_1 + C_2 > 0$ ), необходимо и достаточно потребовать, чтобы  $q(t_{min}) \leq 0$ , откуда получаем условие 3 следствия.

Следствие доказано.  $\square$

**3.3. Случай  $\mathbb{B}$  ( $J_{\mathbb{B}}$  – жорданова клетка).** Определим константы  $C_1, C_2$  в терминах начальных данных  $v_1(0)$  и  $v_2(0)$  следующим образом:

$$C_1 = \frac{a_{22}}{\det A}(a_{11}v_1(0) + a_{12}v_2(0)), \quad C_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{\det A}(a_{21}v_1(0) + a_{22}v_2(0)). \quad (20)$$

Чтобы найти функцию  $q(t) = \int u_1(t) dt = \int (C_1 + C_2 t) \exp(\lambda t) dt$ ,  $q(0) = 1$ , нам нужно рассмотреть две ситуации:

1. если  $\lambda \neq 0$ , то

$$q(t) = 1 + \frac{C_2}{\lambda} t \exp(\lambda t) + \frac{(C_1 \lambda - C_2)(\exp(\lambda t) - 1)}{\lambda^2};$$

2. если  $\lambda = 0$ , то

$$q(t) = 1 + C_1 t + \frac{C_2 t^2}{2}.$$

Мы докажем далее два следствия из теоремы 2 для этих случаев. В следствии 5 рассмотрен случай отличных от нуля собственных значений; в следствии 6 – случай совпадающих нулевых собственных значений.

**Следствие 5.** Пусть  $\lambda \neq 0$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (20). Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда имеет место одна из следующих ситуаций:

1. в случае  $\lambda > 0$ 
  - а.  $C_2 < 0$ ;
  - б.  $C_1 < 0, C_2 > 0, C_2(\exp(-\frac{C_1 \lambda}{C_2}) - 1) + C_1 \lambda - \lambda^2 \geq 0$ ;
  - с.  $C_2 = 0, C_1 < 0$ ;
2. в случае  $\lambda < 0$ 
  - а.  $C_2 < 0, 1 - C_1 \lambda^{-1} + C_2 \lambda^{-2} < 0$ ;
  - б.  $C_1 < 0, C_2 > 0, C_2(\exp(-\frac{C_1 \lambda}{C_2}) - 1) + C_1 \lambda - \lambda^2 \geq 0$ .

*Доказательство.* Будем поочередно перебирать случаи. Заметим предварительно, что

$$q'(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \quad q'(0) = C_1. \quad (21)$$

I. Предположим, что  $\lambda > 0$ . В этом случае  $q(t) \sim C_2 t \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

1. Если  $C_2 < 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = -\infty$ , и так как  $q(0) = 1$ , то всегда имеется точка пересечения графика функции  $q(t)$  с осью  $Ot$  при  $t > 0$ .

2. Если  $C_2 > 0$ , то функция  $q(t)$  имеет точку экстремума  $t_{extr} = -\frac{C_1}{C_2}$ . Легко видеть, что  $t_{extr} > 0$  тогда и только тогда, когда  $C_1 < 0$ . Действительно, в противном случае, когда  $C_1 \geq 0$ , в силу второго равенства

(21) имеем, что функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ , точек пересечения её графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$  нет. Если же  $C_1 < 0$ , то точка  $t_{extr}$  будет точкой минимума (так как  $q'(0) < 0$ ). Таким образом, на положительной полуоси точка пересечения графика функции  $q(t)$  имеется тогда и только тогда, когда

$$q(t_{extr}) = -C_2\lambda^{-2}(\exp(-\frac{C_1\lambda}{C_2}) - 1) - C_1\lambda^{-1} + 1 \leq 0, \quad (22)$$

и её не будет в противном случае.

II. Предположим, что  $\lambda < 0$ . В этом случае  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 1 - C_1\lambda^{-1} + C_2\lambda^{-2}$ .

1. Если  $C_1 > 0$  и  $C_2 > 0$ , то в силу первого равенства (21) производная  $q'(t)$  положительна и функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ , точек пересечения её графика с положительной полуосью нет.

2. Если  $C_1 > 0$  и  $C_2 < 0$ , то функция  $q(t)$  имеет точку экстремума, определяемую равенством  $t_{extr} = -\frac{C_1}{C_2} > 0$  и так как  $q'(0) = C_1 > 0$ , то это точка максимума. Таким образом, имеется точка пересечения графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 1 - C_1\lambda^{-1} + C_2\lambda^{-2} < 0$ , и такой точки пересечения нет в противном случае.

3. Если  $C_1 < 0$  и  $C_2 > 0$ , то функция  $q(t)$  имеет точку экстремума, определяемую равенством  $t_{extr} = -\frac{C_1}{C_2} > 0$ , и так как  $q'(0) = C_1 < 0$ , то это точка минимума. Значит, будет иметься точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (22), и её нет в противном случае.

4. Если  $C_1 < 0$  и  $C_2 < 0$ , то в силу первого равенства (21) производная  $q'(t)$  отрицательна и функция  $q(t)$  убывает при  $t > 0$ . Таким образом, имеется точка пересечения графика с осью  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 1 - C_1\lambda^{-1} + C_2\lambda^{-2} < 0$ , и точки пересечения нет в противном случае.

III. Рассмотрим теперь ситуацию, когда  $C_1 = 0$ . В этом случае  $q(t) = -C_2\lambda^{-2}(e^{\lambda t} - 1) + C_2\lambda^{-1}te^{\lambda t} + 1$ ,  $q'(t) = C_2te^{\lambda t}$ .

1. Пусть  $C_2 > 0$ , тогда в силу первого равенства (21) функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ , следовательно, точки пересечения с положительной полуосью нет.

2. Если  $C_2 < 0$  и  $\lambda > 0$ , то  $q(t) \sim C_2\lambda^{-2}te^{\lambda t} \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Значит, обязательно будет точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . Если же  $\lambda < 0$ , то в силу первого равенства (21) функция  $q(t)$  убывает при  $t > 0$ , и имеется точка пересечения с осью  $Ot$ ,  $t > 0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = (1 + C_2\lambda^{-2}) < 0$ , т.е.  $C_2 < -\lambda^2$ . В противном случае точки пересечения с положительной полуосью нет.

IV. Пусть  $C_2 = 0$ . В этом случае  $q(t) = C_1\lambda^{-1}(e^{\lambda t} - 1) + 1$ ,  $q'(t) = C_1e^{\lambda t}$ .

1. Пусть  $C_1 > 0$ , тогда в силу первого равенства (21) функция  $q(t)$  возрастает при  $t > 0$ , следовательно, точки пересечения графика с положительной полуосью нет.

2. Если  $C_1 < 0$  и  $\lambda > 0$ , то  $q(t) \sim C_1 \lambda^{-1} e^{\lambda t} \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Значит, обязательно будет точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ . Если же  $\lambda < 0$ , то в силу первого равенства (21) функция  $q(t)$  убывает при  $t > 0$ , и имеется точка пересечения с положительной полуосью тогда и только тогда, когда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = (1 - C_1 \lambda^{-1}) < 0$ , т.е.  $C_1 < \lambda$ . В противном случае точки пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$  нет.

Следствие доказано.  $\square$

**Следствие 6.** Пусть  $\lambda = 0$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (20). Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

1.  $C_2 < 0$ ;
2.  $C_2 = 0, C_1 < 0$ ;
3.  $C_2 > 0, C_1 < 0, C_1^2 \geq 2C_2$ .

*Доказательство.* Если  $C_2 < 0$ , то ветви параболы  $q(t)$  направлены вниз и  $q(0) = 1 > 0$ , следовательно, имеется точка пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$ .

Если  $C_2 = 0$ , то  $q(t) = 1 + C_1 t$ . Если  $C_1 \geq 0$ , то  $q(t)$  возрастает, и точек пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$  нет, если  $C_1 < 0$ , то  $q(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$  и найдется искомая точка пересечения.

Если  $C_2 > 0$ , то ветви параболы направлены вверх, её вершина находится в точке  $t_{min} = -\frac{C_1}{C_2}$ . Если  $C_1 \geq 0$ , то вершина параболы находится в левой полуплоскости или на оси  $Oq$ , и следовательно на промежутке  $t \geq 0$  функция  $q(t)$  возрастает, и точек пересечения её графика с положительной полуосью нет. Если же  $C_1 < 0$ , то вершина находится справа и  $q(t_{min}) = 1 - \frac{C_1^2}{2C_2} \leq 0$ , откуда получаем третье условие следствия.

Следствие доказано.  $\square$

**3.4. Случай  $\mathbb{C}$  (матрица  $J_{\mathbb{C}}$  кососимметричная).** Определим константы  $C_1, C_2$  в терминах начальных данных  $v_1(0)$  и  $v_2(0)$  следующим образом:

$$C_1 = \frac{(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})v_1(0) + (a_{12}^2 + a_{22}^2)v_2(0)}{\det A}, \quad C_2 = v_1(0). \quad (23)$$

В этом случае  $q(t) = \int u_1(t) dt = \int \exp(\alpha t) (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) dt$ ,  $q(0) = 1$ , и непосредственным интегрированием получаем

$$q(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} [(C_1 \alpha + C_2 \beta) \sin \beta t + (C_2 \alpha - C_1 \beta) \cos \beta t] - \frac{C_2 \alpha - C_1 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} + 1.$$

В этом случае имеем следствие из теоремы 2:

**Следствие 7.** Пусть  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$ , константы  $C_1, C_2$  определены условием (23). Пусть также константы  $C_1$  и  $C_2$  не равны одновременно нулю. Тогда решение системы (9) с начальными данными  $(v_1(0), v_2(0))$  теряет гладкость за конечное время тогда и только тогда, когда имеет место одна из следующих ситуаций:

1.  $\alpha > 0$ ;
2.  $\alpha = 0, \beta^2 + 2C_1\beta \leq C_2^2$ ;
3. в случае  $\alpha < 0$ 
  - a.  $C_2 \geq 0, C_1 \geq 0, -\beta e^{\alpha t^*} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \leq C_2\alpha - C_1\beta - \alpha^2 - \beta^2$ ;
  - b.  $C_2 \geq 0, C_1 \leq 0, e^{\alpha t^*} \left( \beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} + \frac{2C_1C_2\alpha}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right) \geq C_1\beta + \alpha^2 + \beta^2 - C_2\alpha$ ;
  - c.  $C_2 \leq 0, C_1 \geq 0, e^{\alpha t^*} \left( \beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} + \frac{2C_1C_2\alpha}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right) \leq C_2\alpha - C_1\beta - \alpha^2 - \beta^2$ ;
  - d.  $C_2 \leq 0, C_1 \leq 0, \beta e^{\alpha t^*} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \leq C_2\alpha - C_1\beta - \alpha^2 - \beta^2$ .

Здесь  $t_n^* = \frac{1}{\beta}(\pi n - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Будем поочередно перебирать случаи. Заметим предварительно, что

$$q'(t) = e^{\alpha t}(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t), \quad q'(0) = C_2. \quad (24)$$

Преобразуем функцию  $q(t)$  следующим образом:

$$q(t) = \frac{\exp(\alpha t)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\beta t + \phi_0) - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (C_2\alpha - C_1\beta) + 1, \quad (25)$$

где  $\phi_0$  – вспомогательный угол такой, что  $\sin \phi_0 = \frac{C_2\alpha - C_1\beta}{\sqrt{(C_1^2 + C_2^2)(\alpha^2 + \beta^2)}}$ ;  
 $\cos \phi_0 = \frac{C_1\alpha + C_2\beta}{\sqrt{(C_1^2 + C_2^2)(\alpha^2 + \beta^2)}}$ .

1. Пусть  $\alpha > 0$ . Тогда из формулы (25) следует, что  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} q(t) = +\infty$  и  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} q(t) = -\infty$ , откуда получаем, что точно имеются точки пересечения функции  $q(t)$  с осью  $Ot$  при  $t > 0$ .

2. Пусть  $\alpha = 0$ . В этом случае  $q(t)$  имеет следующий вид:

$$q(t) = \frac{1}{\beta}(C_2 \sin \beta t - C_1 \cos \beta t) + \frac{C_1}{\beta} + 1.$$

С использованием равенства (25)

$$q_{min} = -\frac{1}{\beta} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} + 1 + \frac{C_1}{\beta} \leq q(t) \leq -\frac{1}{\beta} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} + 1 + \frac{C_1}{\beta} = q_{max},$$

и  $q(t)$  принимает все значения на отрезке  $[q_{min}, q_{max}]$ . Таким образом, график  $q(t)$  пересекает ось  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда  $q_{min} \leq 0 \leq q_{max}$ , откуда  $(\frac{C_1}{\beta} + 1)^2 \leq \frac{1}{\beta^2}(C_1^2 + C_2^2)$ . В противном случае точек пересечения с осью  $Ot$  при  $t > 0$  нет.

3. Пусть  $\alpha < 0$ . В этом случае функция  $q(t)$  имеет счетное число экстремумов  $t_n^*$ , которые находятся из уравнения  $q'(t) = 0$ , т.е.  $\tan \beta t = -\frac{C_2}{C_1}$ , откуда  $\beta t_n^* = \pi n - \arctan \frac{C_2}{C_1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Заметим, что в этом случае  $q(t)$  пересекает ось  $Ot$  при  $t > 0$  тогда и только тогда, когда  $q = 0$  лежит выше значения  $q(t_{min})$  в первой точке минимума функции  $q(t)$  на положительной полуоси (максимальное значение функции  $q(t)$  на луче  $t > 0$  положительно, так как  $q(0) = 1$ ). В самом деле, так как при  $\alpha < 0$  амплитуда колебаний функции  $q(t)$  убывает, то значения в следующих точках минимума будут больше, а в следующих точках максимума – меньше.

а. Пусть  $C_1 \geq 0$ ,  $C_2 \geq 0$ . В этом случае первой точкой экстремума, которая попадет на луч  $t > 0$  будет  $t_1^* = \frac{1}{\beta}(\pi - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ , а следующей  $t_2^* = \frac{1}{\beta}(2\pi - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ . Тогда в силу равенства (24)  $q'(0) > 0$  и значит,  $t_1^*$  является точкой максимума,  $t_2^*$  – точкой минимума. Очевидно, точка  $\beta t_2^*$  лежит в четвертой четверти, тогда  $\sin \beta t_2^* = -\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ ,  $\cos \beta t_2^* = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ . Непосредственные вычисления показывают, что

$$q(t_2^*) = -\frac{\beta e^{\alpha t_2^*}}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (C_2 \alpha - C_1 \beta) + 1,$$

откуда получаем неравенство, указанное в пункте 3а следствия.

б. Пусть  $C_1 \leq 0$ ,  $C_2 \geq 0$ . В этом случае первой точкой экстремума, которая попадет на луч  $t > 0$  будет  $t_0^* = -\frac{1}{\beta} \arctan \frac{C_2}{C_1}$ , а следующей  $t_1^* = \frac{1}{\beta}(\pi - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ . Тогда в силу равенства (24)  $q'(0) > 0$  и значит,  $t_0^*$  является точкой максимума,  $t_1^*$  – точкой минимума. Очевидно, точка  $\beta t_1^*$  лежит в третьей четверти, тогда  $\sin \beta t_1^* = -\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ ,  $\cos \beta t_1^* = -\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ . Непосредственные вычисления показывают, что

$$q(t_1^*) = -\frac{e^{\alpha t_1^*}}{\alpha^2 + \beta^2} \left( \beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} + \frac{2C_1 C_2 \alpha}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right) - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (C_2 \alpha - C_1 \beta) + 1,$$

откуда получаем неравенство, указанное в пункте 3б следствия.

с. Пусть  $C_1 \geq 0$ ,  $C_2 \leq 0$ . В этом случае первой точкой экстремума, которая попадет на луч  $t > 0$  будет  $t_0^* = -\frac{1}{\beta} \arctan \frac{C_2}{C_1}$ , а следующей  $t_1^* = \frac{1}{\beta}(\pi - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ . Тогда в силу равенства (24)  $q'(0) < 0$  и значит,  $t_0^*$  является точкой минимума,  $t_1^*$  – точкой максимума. Очевидно, точка  $\beta t_0^*$  лежит в первой четверти, тогда  $\sin \beta t_0^* = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ ,  $\cos \beta t_0^* = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ .

Так как

$$q(t_0^*) = \frac{e^{\alpha t_0^*}}{\alpha^2 + \beta^2} \left( \beta \sqrt{C_1^2 + C_2^2} + \frac{2C_1 C_2 \alpha}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \right) - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (C_2 \alpha - C_1 \beta) + 1,$$

то отсюда получаем неравенство, указанное в пункте 3с следствия.

д. Пусть  $C_1 \leq 0$ ,  $C_2 \leq 0$ . В этом случае первой точкой экстремума, которая попадет на луч  $t > 0$  будет  $t_1^* = \frac{1}{\beta}(\pi - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ , а следующей

$t_2^* = \frac{1}{\beta}(2\pi - \arctan \frac{C_2}{C_1})$ . Тогда в силу равенства (24)  $q'(0) < 0$  и значит,  $t_1^*$  является точкой минимума,  $t_2^*$  – точкой максимума. Очевидно, точка  $\beta t_1^*$  лежит во второй четверти, тогда  $\sin \beta t_1^* = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ ,  $\cos \beta t_1^* = -\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ .

Вычисляя

$$q(t_1^*) = \frac{\beta e^{\alpha t_1^*}}{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (C_2 \alpha - C_1 \beta) + 1,$$

получим неравенство, указанное в пункте 3d следствия.

Следствие доказано.  $\square$

#### 4 Особые точки расширенной системы (9) на производные

Система (9) имеет особые точки, указанные в таблице. Их устойчивость/неустойчивость исследовалась по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению и приведена ниже:

особая точка	асимпт. устойчива	неустойчива
$B_1(0, 0)$	$\Re(\lambda_1) < 0$	$\Re(\lambda_1) > 0$ и (или) $\Re(\lambda_2) > 0$
$B_2(\lambda_2, -\frac{a_{11}}{a_{12}} \lambda_2)$		$\lambda_1 > \lambda_2$ и (или) $\lambda_2 < 0$
$B_3(\lambda_1, -\frac{a_{21}}{a_{22}} \lambda_1)$	$\lambda_1 > \lambda_2$ и $\lambda_1 > 0$	$\lambda_1 < 0$
$B_4(\lambda, -\frac{a_{21}}{a_{22}} \lambda)$		$\lambda < 0$

Особые точки  $B_2$  ( $a_{12} \neq 0$ ) и  $B_3$  ( $a_{22} \neq 0$ ) существуют только в случае матрицы  $J_{\mathbb{A}}$ . Особая точка  $B_4$  ( $a_{22} \neq 0$ ) существует для случая матрицы  $J_{\mathbb{B}}$ .

В таблице далее проведена классификация этих особых точек на фазовой плоскости:

особая точка	узел	седло	дикрит. узел	вырожд. узел	фокус
$B_1$ ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ )	$\lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$		
$B_1$ ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )				$\lambda \neq 0$	
$B_1$ ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ )					$\alpha \neq 0$
$B_2$	$(\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq 0$	$(\lambda_2 - \lambda_1) \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, a_{22} = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, a_{22} \neq 0$	
$B_3$	$(\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 > 0, \lambda_2 \neq 0$	$(\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 < 0, \lambda_2 \neq 0$	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, a_{12} = 0$	$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, a_{12} \neq 0$	

*Доказательство.* Найдем сперва особые точки системы (11) (на фазовой плоскости  $\mathbf{w}$ ), потом с использованием равенства (10) особые точки

системы (9) (на фазовой плоскости  $\mathbf{v}$ ) и исследуем их по первому приближению. Обозначим за  $\mu_1, \mu_2$  собственные значения матрицы линейного приближения правой части системы (11).

1. Для случая матрицы  $J_{\mathbb{A}}$  имеется три особые точки системы (9):  $\tilde{B}_1(0, 0)$ ,  $\tilde{B}_2\left(0, -\frac{\lambda_2 \det A}{a_{12}}\right)$ ,  $\tilde{B}_3\left(\frac{\lambda_1 \det A}{a_{22}}, 0\right)$ , которые в свою очередь соответствуют трем точкам  $B_i, i = 1..3$ . Для особой точки  $B_1$  собственные значения  $\mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \lambda_2$ ; для особой точки  $B_2$  собственные значения  $\mu_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \mu_2 = -\lambda_2$ , для особой точки  $B_3$  собственные значения  $\mu_1 = -\lambda_1, \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ . Применяя теорему Ляпунова об устойчивости особых точек по первому приближению, получим условия, указанные в таблице.

2. Для случая матрицы  $J_{\mathbb{B}}$  имеется две особые точки системы (9):  $\tilde{B}_1$  и  $\tilde{B}_4\left(\frac{\lambda \det A}{a_{22}}, 0\right)$ , которые в свою очередь соответствуют двум точкам  $B_1$  и  $B_4$ . Для особой точки  $B_1$  собственные значения  $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$ ; для особой точки  $B_4$  собственные значения  $\mu_1 = -\lambda, \mu_2 = 0$ . Применяя теорему Ляпунова об устойчивости особых точек по первому приближению, получим условия, указанные в таблице.

3. Для случая матрицы  $J_{\mathbb{C}}$  имеется одна особая точка системы (9):  $\tilde{B}_1$ , которая соответствует точке  $B_1$ . Для неё собственные значения  $\mu_1 = \alpha + i\beta, \mu_2 = \alpha - i\beta$ . Применяя теорему Ляпунова об устойчивости особых точек по первому приближению, получим условия, указанные в таблице. Утверждение про особые точки и их устойчивость доказано.  $\square$

Заметим, что следствия теоремы 2 позволяют точно найти области притяжения особых точек. В нижеприведенной таблице указаны соотношения на  $\lambda_i, i = 1, 2$ , в которых исследование данной точки невозможно по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению:

$B_1$	$\Re(\lambda_1) = 0$	неустойчива для $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , устойчива неасимпт. для $\lambda_1 \in \mathbb{C}$
$B_2$	$\lambda_1 = \lambda_2$	неустойчива
$B_3$	$\lambda_1 = \lambda_2$ или $\lambda_1 = 0$	неустойчива
$B_4$	$\lambda \geq 0$	неустойчива

*Доказательство.* Для доказательства неустойчивости особой точки  $B_1$  в случаях  $J_{\mathbb{A}}$  или  $J_{\mathbb{B}}$  построим функцию Четаева вида  $V(w_1, w_2) = w_1^2 - w_2^2$  в области  $-w_1 < w_2 < w_1$  или  $V(w_1, w_2) = w_1 w_2$  в области  $w_1 > 0, w_2 > 0$  соответственно.

Для доказательства устойчивости точки  $B_1$  в случае  $J_{\mathbb{C}}$  построим функцию Ляпунова. Ею является первый интеграл системы (11), который имеет следующий вид:

$$V(w_1, w_2) = \left( \frac{\beta \det A \cdot (a_{12} \sqrt{w_1^2 + w_2^2} - |a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \beta \det A|)}{a_{12}^2 w_2^2 - 2a_{12} a_{22} w_1 w_2 - 2\beta \det A \cdot a_{12} w_1 - (a_{22} w_2 + \beta \det A)^2} \right)^2 (w_1^2 + w_2^2).$$

Для доказательства неустойчивости особых точек  $B_2 - B_4$  построим функцию Четаева вида  $V(w_1, w_2) = w_1 w_2$  в области  $w_1 > 0, w_2 > 0$ , или  $w_1 < 0, w_2 < 0$ , сдвинутые в каждую из этих точек соответственно.  $\square$

## 5 Простые волны

Решение системы двух квазилинейных уравнений для неизвестного вектора  $(V_1, V_2)^T$  назовём простой волной, если компоненты решения  $V_1$  и  $V_2$  связаны зависимостью  $V_2 = \Psi(V_1)$ , где  $\Psi$  – некоторая по крайней мере  $C^1$ -гладкая функция. Это позволяет свести исходную систему на простые волны к одному квазилинейному уравнению, которое уже может быть исследовано стандартными методами (например, [1]).

Для произвольной системы простая волна может не существовать. мы покажем, что для системы (5) простая волна существует всегда, хотя связь между функциями  $V_1$  и  $V_2$  может не быть явной. Однако если зависимость  $V_2 = \Psi(V_1)$ ,  $\Psi'(V_1) = 0$ , найдена, уравнение, к которому сводится (6), имеет вид

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} = aV_1 + b\Psi(V_1).$$

Действительно, если предположить зависимость  $V_2 = V_2(V_1)$ , то система (6) вдоль каждой характеристики  $x = x(t)$  к одному однородному уравнению

$$\frac{dV_2}{dV_1} = \frac{cV_1 + dV_2}{aV_1 + bV_2}, \quad (26)$$

первый интеграл которого находится аналитически и дает необходимую зависимость между  $V_1$  и  $V_2$ .

Выясним, какой вид имеет этот первый интеграл в зависимости от вида матрицы  $Q$ . Сделаем замену переменных

$$\mathbf{W} = A\mathbf{V}, \quad \mathbf{W} = (W_1 \ W_2)^T, \quad \mathbf{V} = (V_1 \ V_2)^T, \quad (27)$$

где  $A$  – невырожденная матрица перехода от матрицы  $Q$  к её жордановой нормальной форме  $J$  такая, что  $J = AQA^{-1}$ , тогда мы можем записать систему (7) в виде  $\dot{\mathbf{W}} = J\mathbf{W}$ . Если матрица имеет вид  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , то

$$W_1 = a_{11}V_1 + a_{12}V_2, \quad W_2 = a_{21}V_1 + a_{22}V_2.$$

**Теорема 3.** Введём:  $\lambda_{1,2}$  – собственные значения матрицы  $A$ , удовлетворяющие уравнению  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ .

1. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны, и для каждого из них имеется столько независимых собственных векторов, какова кратность этого собственного значения. Тогда первый интеграл уравнения (26) имеет вид:  $(a_{21}V_1 + a_{22}V_2)^{\lambda_1} = C(a_{11}V_1 + a_{12}V_2)^{\lambda_2}$ .
2. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественны, совпадают и при этом для них имеется только один собственный вектор, то первый интеграл уравнения (26) имеет вид:  $\lambda(a_{11}V_1 + a_{12}V_2) = (a_{21}V_1 + a_{22}V_2)(C + \ln(a_{21}V_1 + a_{22}V_2))$ , где  $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2$ .

3. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно сопряженные собственные значения, то первый интеграл уравнения (26) имеет вид:  $\beta \ln((a_{11}V_1 + a_{12}V_2)^2 + (a_{21}V_1 + a_{22}V_2)^2) + 2\alpha \arctan \frac{a_{21}V_1 + a_{22}V_2}{a_{11}V_1 + a_{12}V_2} = C$ , где  $\alpha = \Re(\lambda_1)$ ,  $\beta = \Im(\lambda_1)$  и  $\Im(\lambda_1) > 0$ .

Здесь в пунктах 1–3 теоремы  $C$  – произвольная константа.

*Доказательство.* 1. Для случая матрицы  $J_A$  уравнение (26) после перехода к новым неизвестным функциям (27) имеет вид:  $\frac{dW_2}{dW_1} = \frac{\lambda_2 W_2}{\lambda_1 W_1}$ , откуда  $W_2^{\lambda_1} = C W_1^{\lambda_2}$ .

2. Для случая матрицы  $J_B$  после перехода к новым неизвестным функциям (27) имеет вид  $\frac{dW_2}{dW_1} = \frac{\lambda W_2}{\lambda W_1 + W_2}$ , откуда  $\lambda W_1 = W_2(C + \ln W_2)$ .

3. Для случая матрицы  $J_C$  после перехода к новым неизвестным функциям получим  $\frac{dW_2}{dW_1} = \frac{-\beta W_1 + \alpha W_2}{\alpha W_1 + \beta W_2}$ , откуда  $\beta \ln(W_1^2 + W_2^2) + 2\alpha \arctan \frac{W_2}{W_1} = C$ . Теорема доказана.  $\square$

**Предложение 2.** Интегральные кривые уравнения (26) ограничены тогда и только тогда, когда выполнены два следующих условия:  $a = -d$ ;  $d^2 + bc < 0$ .

*Доказательство.* Результат вытекает из того факта, что интегральные траектории линейного уравнения (26) на плоскости  $(V_1, V_2)$  ограничены тогда и только тогда, когда особая точка  $V_1 = V_2 = 0$  является центром.  $\square$

Простые и бегущие волны для уравнений Эйлера-Пуассона (3) в случае  $k = -1$ ,  $N = 1$ ,  $\gamma = 0$ , соответствующие этому случаю, найдены в [10]. Найдём простые волны этих уравнений в оставшихся четырех модельных случаях при  $\gamma = 0$ .

Система уравнений (7) на характеристиках имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = kE, \quad \frac{dE}{dt} = NV, \tag{28}$$

откуда получаем первый интеграл вида

$$NV^2 - kE^2 = C. \tag{29}$$

В данном случае возможно выразить одну компоненту решения через другую и свести систему (3) к одному уравнению

$$V_t + VV_x = kE(V) - qV, \quad E(V) = \pm \sqrt{\frac{1}{k}(NV^2 - C)}.$$

Обозначим  $V_x = v$ ,  $E_x = e$ . Из (29) следует, что  $e = \frac{NVv}{kE(V)}$ , и таким образом первое уравнение системы (9) примет вид

$$\dot{v} = -v^2 + \frac{NVv}{E(V)} \tag{30}$$

Таким образом, рассматривая уравнение (30) вместе с первым уравнением (28) получим линейное уравнение для переменной  $s = v^{-1}$ :

$$\frac{ds}{dV} + \frac{NVs}{NV^2 - C} = \pm \frac{\text{sign}(k)}{\sqrt{k(NV^2 - C)}}.$$

После интегрирования получим

$$v = \pm \frac{\sqrt{k(NV^2 - C)}}{\text{sign}(k) \cdot V + \tilde{C}},$$

где константа

$$\tilde{C} = \pm \frac{\sqrt{k(NV_0^2(x_0) - C)}}{V_0'(x_0)} - \text{sign}(k) \cdot V_0(x_0)$$

может быть найдена из начальных данных для каждой  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Таким образом, мы получаем связь производных решений вида простой волны с самим решением вдоль характеристики.

## 6 Примеры

Используя теоремы, полученные в разделе 3, найдем необходимые и достаточные условия для формирования особенностей решения системы (3) в случае  $\gamma = 0$ . Мы рассмотрим 4 модельных случая, в каждой из рассмотренных ситуаций мы построим на плоскости  $(v_1(0), v_2(0))$  область, соответствующую глобально гладкому решению.

1. Пусть  $k = 1$ ,  $N = 0$ , в этом случае матрица  $Q$  имеет вид жордановой клетки:  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и, значит, матрица перехода  $A$  совпадает с единичной. Воспользуемся утверждением следствия 6. Так как в этом случае  $C_1 = v_1(0)$ ,  $C_2 = v_2(0)$ , мы получаем, что производные решения обращаются в бесконечность в случае, если  $v_2(0) < 0$  или  $v_2(0) = 0$ ,  $v_1(0) > 0$  или  $v_2(0) > 0$ ,  $v_1(0) < 0$ ,  $v_1(0)^2 \geq 2v_2(0)$ . Область, в которой должны находиться производные начальных данных в каждой точке действительной оси, для того, чтобы решение сохранило глобальную гладкость, заштрихована на рис. 1. Там же представлен фазовый портрет системы (9). Система имеет единственную особую точку  $B_1(0, 0)$ . В этом случае при  $t \rightarrow \infty$  функции  $E$  и  $V$  стремятся к константе, которая в силу системы (1) может быть только нулём, плотность  $n$  стремится к нулю, происходит стабилизация решений к положению равновесия  $V = E = 0$ ,  $N = 0$ .

Если рассмотреть случай  $\gamma > 0$ , то помимо особой точки  $B_1$  добавляется особая точка  $(-\gamma, 0)$ , которая является неустойчивым узлом.

2. Пусть  $k = -1$ ,  $N = 0$ , в этом случае матрица  $Q$  имеет вид жордановой клетки:  $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , матрица перехода  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Воспользуемся утверждением следствия 6. Так как в этом случае  $C_1 = v_1(0)$ ,  $C_2 = -v_2(0)$ , мы получаем, что производные решения обращаются в бесконечность в случае, если  $v_2(0) > 0$  или  $v_2(0) = 0$ ,  $v_1(0) > 0$  или

$v_2(0) < 0, v_1(0) < 0, v_1(0)^2 \geq -2v_2(0)$ . Область, в которой должны находиться производные начальных данных в каждой точке действительной оси, для того, чтобы решение сохранило глобальную гладкость, заштрихована на рис. 1. Там же представлен фазовый портрет системы (9), система имеет единственную особую точку  $B_1(0, 0)$ . В этом случае при  $t \rightarrow \infty$  функции  $E$  и  $V$  стремятся к константе, которая в силу системы (1) может быть только нулём, плотность  $n$  стремится к нулю, происходит стабилизация решений к положению равновесия  $V = E = 0, N = 0$ .

Если рассмотреть случай  $\gamma > 0$ , то помимо особой точки  $B_1$  добавляется особая точка  $(-\gamma, 0)$ , которая является неустойчивым узлом.

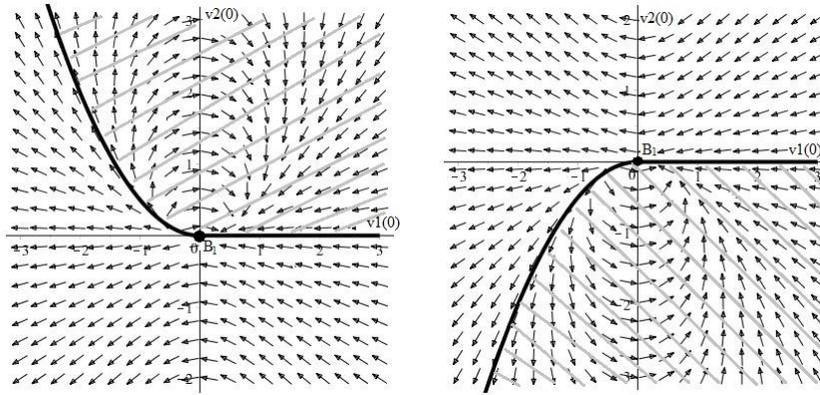


Рис. 1. Области притяжения особых точек системы (9). Слева:  $k = 1, N = 0, \gamma = 0$ , области притяжения не принадлежит часть параболы  $v_1(0)^2 = 2v_2(0), v_1(0) < 0$  и принадлежит луч  $v_2(0) = 0, v_1(0) \leq 0$ . Справа:  $k = -1, N = 0, \gamma = 0$ , области притяжения не принадлежит часть параболы  $v_1(0)^2 = -2v_2(0), v_1(0) < 0$  и принадлежит луч  $v_2(0) = 0, v_1(0) \leq 0$ .

3. Пусть  $k = 1, N = 1$ , в этом случае матрица  $Q$  имеет вид:  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , и ее собственные значения равны  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Матрица перехода  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Воспользуемся утверждением следствия 1. Так как в этом случае  $C_1 = \frac{1}{2}(v_1(0) + v_2(0)), C_2 = \frac{1}{2}(v_1(0) - v_2(0))$ , мы получаем, что производные обращаются в бесконечность в одном из следующих случаев:

- (1)  $v_1(0) + v_2(0) < 0$ ;
- (2)  $v_1(0) + v_2(0) = 0, v_1(0) + v_2(0) < -2$ ;
- (3)  $v_1(0) + v_2(0) > 0, v_1(0) + v_2(0) < 0, v_1(0) < 0, \sqrt{v_2^2(0) - v_1^2(0)} \leq v_2(0) - 1$ .

Область, в которой должны находиться производные начальных данных в каждой точке действительной оси, для того, чтобы решение сохранило глобальную гладкость, заштрихована на рис. 2. Там же представлен фазовый портрет системы (9), система имеет в этом случае три особых

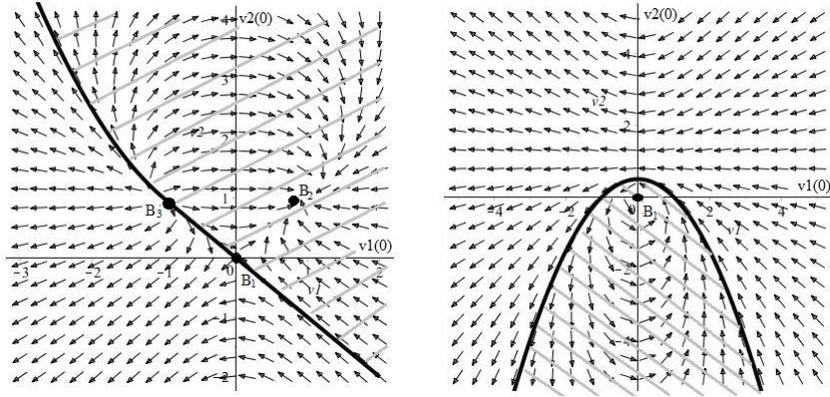


Рис. 2. Области притяжения особых точек системы (9). Слева:  $k = 1$ ,  $N = 1$ ,  $\gamma = 0$ , области притяжения не принадлежит часть параболы  $2v_2(0) = 1 + v_1^2(0)$ ,  $v_1(0) \leq -1$  и принадлежит луч  $v_2(0) = -v_1(0)$ ,  $v_1 > -1$ . Справа:  $k = -1$ ,  $N = 1$ ,  $\gamma = 0$ , области притяжения не принадлежит парабола  $2v_2(0) = 1 - v_1^2(0)$ .

точки  $B_1(0, 0)$ ,  $B_2(1, 1)$ ,  $B_3(-1, 1)$ . Особые точки  $B_1$  и  $B_3$  являются седлами,  $B_2$  – устойчивым узлом. В этом случае при  $t \rightarrow \infty$  функции  $E$  и  $V$  стремятся к аффинному решению  $V = E = x$ , плотность  $n$  стремится к нулю, происходит стабилизация решений к особой точке  $B_2$ .

В случае  $\gamma > 0$  у системы будут по-прежнему три особые точки  $B_1$  и  $\left(\frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4}}{2}, 1\right)$ . Две последние особые точки являются узлами (один – устойчивый, другой – неустойчивый).

4. Пусть  $k = -1$ ,  $N = 1$ , в этом случае матрица  $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , и ее собственные значения равны  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Матрица перехода  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Воспользуемся утверждением следствия 7. Так как в этом случае  $C_1 = -v_2(0)$ ,  $C_2 = v_1(0)$ , мы получаем, что производные обращаются в бесконечность тогда и только тогда, когда  $1 - 2v_2(0) \leq v_1^2(0)$ . Область, в которой должны находиться производные начальных данных в каждой точке действительной оси, для того, чтобы решение сохранило глобальную гладкость, заштрихована на рис. 2. Там же представлен фазовый портрет системы (9), она имеет периодические решения. Система имеет единственную особую точку  $B_1(0, 0)$ , которая является центром. Поведение глобально гладких решений исследовано в [9].

В случае  $\gamma > 0$  особая точка  $B_1$  становится фокусом (подробнее см. [11]).

## References

- [1] G. A. Chechkin, A. Yu. Goritsky. *S.N.Kruzhkov's lectures on first-order quasilinear PDEs*. In: *Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations*, De Gruyter, Berlin, New York, 2009, 1–68.
- [2] C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Berlin-Heidelberg, Springer, 2016.
- [3] M. I. Delova, O. S. Rozanova, *The interplay of regularizing factors in the model of upper hybrid oscillations of cold plasma*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **515**: 2 (2022).
- [4] S. Engelberg, H. Liu, E. Tadmor, *Critical Thresholds in Euler-Poisson Equations*, Ind Univ Math J, **50** (2001), 109–157.
- [5] G. Freiling, *A survey of nonsymmetric Riccati equations*, Linear Algebra and its Applications, **351-352**: 1 (2002), 243–270.
- [6] W. T. Reid, *Riccati differential equations*, Academic Press, New York, 1972.
- [7] O. Rozanova, *On nonstrictly hyperbolic systems and models of natural sciences reducible to them*, AIP Conference Proceedings, **2953**: 1 (2023).
- [8] O. S. Rozanova, *On the behaviour of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler-Poisson equations*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **443** (2023).
- [9] O. S. Rozanova, E. V. Chizhonkov, *On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma*, Z. Angew. Math. Phys., **72**: 13 (2021).
- [10] O. S. Rozanova, E. V. Chizhonkov, *The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations*, Z. Angew. Math. Phys., **73**: 249 (2022).
- [11] O. Rozanova, E. Chizhonkov, M. Delova, *Exact thresholds in the dynamics of cold plasma with electron-ion collision*, AIP Conference Proceedings, **2302**: 1 (2020).

MARKO KASIMIROVICH TURZYNSKY  
RUSSIAN UNIVERSITY OF TRANSPORT,  
OBRASTSOVA STR., 9B9,  
127004, MOSCOW, RUSSIA  
HSE UNIVERSITY,  
POKROVSKY BLVRD., 11,  
109028, MOSCOW, RUSSIA  
PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA (RUDN UNIVERSITY),  
6 MIKLUKHO-MAKLAYA ST,  
117198, MOSCOW, RUSSIAN FEDERATION  
Email address: [M13041@yandex.ru](mailto:M13041@yandex.ru)