S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 360–362 (2024) УДК 519.217.2
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.026 MSC 60J10

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ВОЗВРАТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

С.В. Нагаев

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: A combinatorial inversion formula for a recurrent Markov chain is derived.

Keywords: transition probability, Feller's formula, moment in time.

1 Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\{X_n\}_0^\infty$ – возвратная цепь Маркова, заданная на решетке натуральных чисел. Обозначим через p_{ik} вероятность перехода из точки i в точку k за один шаг. Пусть $p_{ik}^{(n)}$ – вероятность перехода из i в k за n шагов. Фиксируем начальное состояние цепи, например, 1. Положим $p_n = p_{11}^{(n)}$. Пусть q_n – вероятность того, что 1 появится в первый раз в момент времени n. Задача заключается в том, чтобы выразить $\{q_n\}$ через $\{p_n\}$.

Теорема. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$q_n = \sum_{1\le m\le n} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m},$$

Nagaev, S.V., An inversion formula for a recurrent Markov chain.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Поступила 27 декабря 2023 г., опубликована 23 июня 2024 г.

где внутренняя кратная сумма берется по всем натуральным k_j, удовлетворяющим равенству $k_1 + \ldots + k_m = n$.

Доказательство. В книге В. Феллера [1, гл. XII, §3] выводится формула для производящих функций введенных выше дискретных распределений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1 = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k}, \quad |z| < 1,$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1}. \tag{1}$$

Положим $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n z^n$. Очевидно, справедливо тождество

$$\frac{f(z)}{f(z)+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} f^m(z). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что

$$f^m(z) = \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^{k_1 + k_2 \cdots k_m},$$

где в m-кратной сумме $\sum$ каждый из индексов k_i независимо от других пробегает весь натуральный ряд. Представим $f^m(z)$ в виде

$$f^m(z) = \sum_{l=m}^{\infty} \sum\nolimits_1 p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l, \tag{3}$$

где в m-кратной сумме $\sum_1$ индексы суммирования k_j пробегают все натуральные решения уравнения $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = l$. Если $m = 1$ и $k = l$, то $\sum_1 = p_l$. Если $m > 1$, то с необходимостью $l > 1$. Заметим, что $k_m \leq l$. Подставляя в (2) представление (3), получаем

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{f(z)+1} &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \sum_{l \geq m} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq l} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l. \end{aligned} \tag{4}$$

Мы изменили в (4) порядок суммирования согласно формуле

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l \geq m} \; = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq l} \; .$$

Из (1) и (4) выводим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq l} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

References

[1] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I*, John Wiley & Sons, New York, 1950. Zbl 0039.13201

Sergey Victorovich Nagaev
Sobolev Institute of Mathematics,
Acad. Koptyug ave., 4,
630090, Novosibirsk, Russia;
Email address: snagaev1932@gmail.com