

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
<http://semr.math.nsc.ru>

Том 12, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx

УДК 519.217.2
MSC 60J10

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ВОЗВРАТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

С.В. НАГАЕВ

АБСТРАКТ. A combinatorial inversion formula for a recurrent Markov chain is derived.

Keywords: transition probability, Feller's formula, moment in time.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\{X_n\}_0^\infty$ – возвратная цепь Маркова, заданная на решетке натуральных чисел. Обозначим через p_{ik} вероятность перехода из точки i в точку k за один шаг. Пусть $p_{ik}^{(n)}$ – вероятность перехода из i в k за n шагов. Фиксируем начальное состояние цепи, например, 1. Положим $p_n = p_{11}^{(n)}$. Пусть q_n – вероятность того, что 1 появится в первый раз в момент времени n . Задача заключается в том, чтобы выразить $\{q_n\}$ через $\{p_n\}$.

Теорема. Для любого натурального n справедливо равенство

$$q_n = \sum_{1 \leq m \leq n} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m},$$

где внутренняя кратная сумма берется по всем натуральным k_j , удовлетворяющим равенству $k_1 + \dots + k_m = n$.

Доказательство. В книге В. Феллера [1, гл. XII, §3] выводится формула для производящих функций введенных выше дискретных распределений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1 = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k}, \quad |z| < 1,$$

NAGAEV, S.V., AN INVERSION FORMULA FOR A RECURRENT MARKOV CHAIN.

© 2024 НАГАЕВ С.В.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Поступила 30 декабря 2023 г., опубликована 27 апреля 2024 г.

или

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1}.$$

Положим $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$. Очевидно, справедливо тождество

$$(2) \quad \frac{f(z)}{f(z) + 1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} f^m(z).$$

Нетрудно видеть, что

$$f^m(z) = \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} z^{k_1 + k_2 + \cdots + k_m},$$

где в m -кратной сумме \sum каждый из индексов k_i независимо от других пробегает весь натуральный ряд. Представим $f^m(z)$ в виде

$$(3) \quad f^m(z) = \sum_{l=m}^{\infty} \sum_1 p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} z^l,$$

где в m -кратной сумме \sum_1 индексы суммирования k_j пробегают все натуральные решения уравнения $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = l$. Если $m = 1$ и $k = l$, то $\sum_1 = p_l$. Если $m > 1$, то с необходимостью $l > 1$. Заметим, что $k_m \leq l$. Подставляя в (2) представление (3), получаем

$$(4) \quad \frac{f(z)}{f(z) + 1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \sum_{l \geq m} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} z^l \\ = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq l} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} z^l.$$

Мы изменили в (4) порядок суммирования согласно формуле

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l \geq m} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq l}.$$

Из (1) и (4) выводим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq l} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} z^l,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

REFERENCES

- [1] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, v. I, New York etc.: John Wiley & Sons, 1950.

SERGEY VICTOROVICH NAGAEV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
ACAD. KOPTYUG AVE., 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA;
E-mail address: snagaev1932@gmail.com