ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ВОЗВРАТНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

С.В. Нагаев

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск

УДК 519.217.2
MSC 60J10

Abstract. Combinatorial inversion formulas for a recurrent Markov chain are derived.

Ключевые слова: вероятность перехода, формула Феллера, момент времени.

Пусть $\{X_n\}_0^\infty$ – возвратная цепь Маркова, заданная на целочисленной решетке. Обозначим через p_{jk} вероятность перехода из точки i в точку k за один шаг. Пусть $p_{jk}^{(n)}$ – вероятность перехода из i в k за n шагов. Фиксируем начальное состояние цепи, например, 1. Положим $p_n = p_{11}^{(n)}$. Пусть q_n – вероятность того, что 1 появится в первый раз в момент времени n. Задача заключается в том, чтобы выразить $\{q_n\}$ через $\{p_n\}$.

Нетрудно видеть, что

$$p_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} + q_n.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n.$$

Меняя порядок суммирования, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} q_k p_{n-k} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \sum_{j=1}^{\infty} p_j z^j.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k.$$

Деля обе части этого равенства на $1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k z^k$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \Big/ \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \Big). \tag{1}$$

Обращая это равенство, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1}. \tag{2}$$

В книге В. Феллера [1] выводится формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1 = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k}$$

(см. [1, гл. XII, 3]). Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n}{\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + 1}.$$

Таким образом, используя формулу Феллера, мы получили формулу (2).

Положим $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n z^n$. Очевидно,

$$\frac{f(z)}{f(z)+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} f^m(z). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что

$$f^m(z) = \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^{k_1 + k_2 \cdots k_m},$$

где каждое из k_i принимает все целочисленные значения от 1 до ∞. Представим $f^m(z)$ в виде

$$f^m(z) = \sum_{l=m}^{\infty} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l, \tag{4}$$

где $\sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m}$ берется по $k_1,\ k_2, \cdots,\ k_m$ таким, что $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = l$.

Обозначим $\sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m}$ через $\sum_1$. Если $m=1$, $l=k$, то $\sum_1 = p_k$. Если $m>1$, то необходимо $l>1$. Заметим, что $k_m \le l$. Подставляя в (3) представление (4), получаем

$$\frac{f(z)}{f(z)+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \sum_{l \ge m} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le m \le l} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l. \quad (5)$$

Мы изменили в (5) порядок суммирования согласно формуле

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l \ge m} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le m \le l} .$$

Из (2) и преобразованной формулы (5) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{1 \le m \le l} (-1)^{m+1} \sum p_{k_1} p_{k_2} \cdots p_{k_m} \, z^l.$$

REFERENCES

1. *Feller W.* Introduction to probability theory and its applications (discrete distributions). Publishing House “Foreign Literature”, Moscow; 1952.