S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 1, стр. 196–212 (2024) УДК 517.51
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.014 MSC 30C65,46E35

МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ, ЕМКОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

А.С. Романов

Представлено Е.М. Рудым

Abstract: We study the relationships between p-module of a system of surfaces, vector fields , capacity and differential forms.

Keywords: p-modules, vector fields, capacity, differential forms.

В теории квазиконформных, квазиизометрических и других классов отображений, связанных с пространствами Соболева, важную роль играют понятия вариационной ёмкости и модуля семейств кривых и поверхностей, позволяющие получить адекватное описание различных свойств рассматриваемых отображений. Нас интересуют взаимосвязи модулей семейств кривых и модулей семейств поверхностей с нелинейной ёмкостью, векторными полями и дифференциальными формами.

Связь p-ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ с p-модулем семейства кривых, соединяющих множества K_0 и K_1 давно известна [1, 2, 3]. С.К. Водопьянов высказал гипотезу, что p-модули некоторых других семейств кривых и поверхностей можно связать с ёмкостью, в определении которой вместо класса допустимых функций используется соответствующий класс допустимых дифференциальных форм.

Romanov, A.S., Modules of a system of surfaces, vector fields, capacity, differential forms.

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).
Поступила 3 декабря 2023, опубликована 28 февраля 2024 г.

Данную заметку можно рассматривать как иллюстрацию к гипотезе С.К. Водопьянова. Мы не стремимся к рассмотрению вопроса в максимальной общности, но хотим отметить некоторые, на наш взгляд, интересные факты и свойства, выполняющиеся в модельных случаях. Вначале более подробно рассматривается ситуация в R^2, а затем при некоторых априорных предположениях модельная ситуация в R^3.

§1. Модули семейств поверхностей и вариационная ёмкость

Следуя работе [4], стандартным образом определим понятие p-модуля семейства поверхностей (кривых).

Пусть область $G \subset R^n$ и $1 \le k \le n-1$. Для обозначения k-мерной меры Хаусдорфа будем использовать символ H^k, для меры Лебега в R^n символ m_n.

Семейство k-мерных локально липшицевых поверхностей (кривых при $k = 1$) в области G обозначим символом Σ. Неотрицательную борелевскую функцию $\rho : G \to \overline{R}$ называют допустимой метрикой для семейства Σ, если

$$\int\limits_S \rho \, dH^k \ge 1$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$. Далее выражение $\rho \succ \Sigma$ будет означать, что метрика ρ является допустимой для семейства Σ.

При $1 < p < \infty$ определим p-модуль семейства Σ равенством

$$\operatorname{mod}_p(\Sigma) = \inf_{\rho \succ \Sigma} \int\limits_G \rho^p \, dm_n.$$

Множество допустимых метрик является выпуклым. При $p > 1$ пространство Лебега $L_p(G)$ является равномерно выпуклым, поэтому существует единственная экстремальная метрика ρ_0, для которой

$$\operatorname{mod}_p(\Sigma) = \int\limits_G \rho_0^p \, dm_n.$$

Рассмотрим два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \overline{G}$. Класс допустимых функций для конденсатора $K = (K_0, K_1)$ при $1 < p < \infty$ определим условием

$$D(K_0, K_1, G) = \{u \in L^1_p(G) \cap C(G \cup K_0 \cup K_1) \mid u|_{K_0} = 0, \; u|_{K_1} = 1\},$$

а соответствующую вариационную p-ёмкость определим равенством

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0, K_1, G)} \int\limits_G |\nabla u|^p \, dm_n.$$

При $p > 1$ существует единственная экстремальная функция

$$u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)} \cap L^1_p(G)$$

такая, что

$$\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) = \int\limits_G |\nabla u_0|^p \, dm_n.$$

В данном случае уравнение Эйлера-Лагранжа для p-интеграла Дирихле имеет вид

$$\int\limits_G \left(|\nabla u|^{p-2} \, \nabla u, \nabla \varphi \right) \, dm_n = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Следовательно, экстремальная функция является слабым решением p-уравнения Лапласа

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0,$$

иными словами является p-гармонической.

Известно, что всякая p-гармоническая функция является гладкой и принадлежит классу $C^{1,\alpha}_{loc}(G), \alpha > 0$ [5, 6].

Вообще говоря, в определении p-ёмкости могут быть использованы и другие классы допустимых функций, на которых нижняя грань значений p-интеграла Дирихле равна $\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G)$. Довольно подробное обсуждение свойств вариационной ёмкости можно найти в работах [7, 8].

Понятие модуля является более общим чем ёмкость, поскольку p-модуль может быть определён для семейств кривых и семейств поверхностей, которые не связаны с какой-либо парой множеств K_0 и K_1. При этом с каждым конденсатором $K = (K_0, K_1)$ связаны два специальных семейства:

1) Γ_K - семейство всех локально липшицевых кривых, лежащих в области G и соединяющих множества K_0 и K_1;

2) Σ_K^* - семейство всех локально липшицевых гиперповерхностей, лежащих в области G и разделяющих множества K_0 и K_1.

Согласно результату работы [9]

$$\operatorname{mod}_{p'}(\Sigma_K^*) = \left[\operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G)\right]^{-p'/p}, \tag{1}$$

здесь $1/p + 1/p' = 1$.

В работах [1, 2, 3] показано, что

$$\operatorname{mod}_p(\Gamma_K) = \operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G). \tag{2}$$

Это позволяет записать равенство (1) в более симметричном виде

$$\left[\operatorname{mod}_p(\Gamma_K)\right]^{1/p} \cdot \left[\operatorname{mod}_{p'}(\Sigma_K^*)\right]^{1/p'} = 1, \tag{3}$$

§2. Модули, ёмкость, векторные поля, дифференциальные формы в R^2

На плоскости R^2 о свойствах p-гармонических функций и, как следствие, о свойствах экстремальных функций для p-ёмкости известно больше чем в пространствах более высокой размерности. Поэтому мы начнём с наиболее простого и наглядного плоского случая.

Пусть область $G \subset R^2$. Как уже отмечалось, p-гармонические функции являются гладкими и принадлежат классу $C^{1,\alpha}_{loc}(G), \alpha > 0$. При этом в плоской области G у всякой p-гармонической функции u множество критических точек

$$Z = \{(x, y) \in G \mid \ \nabla u(x, y) = 0\}$$

является дискретным и $u \in C_0^\infty(G \setminus Z)$ [10, 11].

Обозначим через Γ семейство локально липшицевых ориентированных кривых, расположенных в области $G \subset R^2$. Непрерывное векторное поле $\vec{\mathbf{V}}$ будем называть допустимым для семейства Γ, если для всех кривых $\gamma \in \Gamma$ выполняется оценка

$$\left| \int\limits_\gamma (\vec{\mathbf{V}}, \vec{\tau}) dl \right| \geq 1,$$

где $\vec{\tau}$ - единичный касательный вектор к кривой γ. Далее выражение $\vec{\mathbf{V}} \succ \Gamma$ будет означать, что векторное поле $\vec{\mathbf{V}}$ является допустимым для семейства Γ. Если $\vec{\mathbf{V}} \succ \Gamma$, то, меняя при необходимости ориентацию некоторых кривых на противоположную, можно добиться выполнения неравенства

$$\int\limits_\gamma (\vec{\mathbf{V}}, \vec{\tau}) dl \geq 1.$$

Определим модуль $MV_p(\Gamma)$ равенством

$$MV_p(\Gamma) = \inf_{\vec{\mathbf{V}} \succ \Gamma} \iint\limits_G |\vec{\mathbf{V}}|^p \, dxdy.$$

Поскольку для всякого поля $\vec{\mathbf{V}} \succ \Gamma$ и всех кривых $\gamma \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\gamma |\vec{\mathbf{V}}| dl \geq \left| \int\limits_\gamma (\vec{\mathbf{V}}, \vec{\tau}) dl \right| dl \geq 1,$$

то $|\vec{\mathbf{V}}|$ является допустимой метрикой для Γ. Следовательно,

$$MV_p(\Gamma) \geq \mathrm{mod}_p(\Gamma). \tag{4}$$

Противоположное неравенство в общем случае не выполняется.

Пример 1. На плоскости R^2 рассмотрим квадрат

$$Q = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

и два семейства отрезков: A - горизонтальных отрезков, соединяющих боковые стороны квадрата, и B - вертикальных отрезков, соединяющих основания квадрата. Будем считать отрезки ориентированными, с началом на соответствующей оси координат.

Если метрика ρ является допустимой для семейства A, то

$$1 \leq \int_0^1 \rho\, dx \leq \left(\int_0^1 \rho^p\, dx \right)^{1/p}$$

и

$$\iint_Q \rho^p\, dxdy \geq 1.$$

Поэтому метрика $\rho_0 \equiv 1$ является экстремальной для семейства A и $\mathrm{mod}_p(A) = 1$.

Вполне очевидно, что метрика $\rho_0 \equiv 1$ является экстремальной и для семейств B и $C = A \cup B$. При этом

$$\mathrm{mod}_p(A) = \mathrm{mod}_p B) = \mathrm{mod}_p(C) = 1.$$

Легко заметить, что экстремальное для семейства A векторное поле $\vec{\mathbf{V}}_A$ в каждой точке параллельно вектору $\vec{e}_1 = (1, 0)$ и $|\vec{\mathbf{V}}_A| \equiv 1$, экстремальное для семейства B векторное поле $\vec{\mathbf{V}}_B$ в каждой точке параллельно вектору $\vec{e}_2 = (0, 1)$ и $|\vec{\mathbf{V}}_B| \equiv 1$.

Семейства A и B симметричны относительно диагонали квадрата, поэтому экстремальное для семейства C векторное поле $\vec{\mathbf{V}}_C$ параллельно диагонали, а его проекции на горизонтальные отрезки совпадают с полем $\vec{\mathbf{V}}_A$ и в силу симметрии проекции на вертикальные отрезки совпадают с полем $\vec{\mathbf{V}}_B$. Следовательно, в каждой точке $\vec{\mathbf{V}}_C = \vec{\mathbf{V}}_A + \vec{\mathbf{V}}_B$ и $|\vec{\mathbf{V}}_C| \equiv \sqrt{2}$. Поэтому

$$MV_p(A) = \mathrm{mod}_p(A) = 1,\ MV_p(B) = \mathrm{mod}_p(B) = 1,$$

$$MV_p(C) = 2^{p/2} > \mathrm{mod}_p(C) = 1. \blacksquare$$

Семейство C имеет весьма специфическую структуру: часть принадлежащих ему отрезков соединяет противоположные стороны, а другая часть эти же стороны разделяет. Обычно рассматриваются семейства кривых устроенные более регулярным образом.

Рассмотрим конденсатор $K = (K_0, K_1) \subset \overline{G}$ и семейство Γ_K - всех локально липшицевых кривых в области G, соединяющих множество K_0 с множеством K_1 и ориентированных естественным образом. Несложно показать, что $MV_p(\Gamma_K) = \mathrm{mod}_p(\Gamma_K)$.

Если функция u является экстремальной для конденсатора K, то для всех кривых $\gamma \in \Gamma_K$

$$\int\limits_\gamma (\nabla u, \vec{\tau}) dl \geq 1,$$

т.е. $\nabla u \succ \Gamma_K$. Поэтому

$$MV_p(\Gamma_K) \leq \mathrm{cap}_p(K_0, K_1). \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) и равенства (2) следует

$$MV_p(\Gamma_K) = \mathrm{mod}_p(\Gamma_K) = \mathrm{cap}_p(K_0, K_1).$$

Для семейства Γ_K можно определить модуль $M\Omega_p(\Gamma_K)$, связанный с дифференциальными формами. Дифференциальную форму $\omega = Pdx + Qdy$ будем называть допустимой для семейства Γ_K, если

$$\left| \int\limits_\gamma \omega \right| \geq 1,$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma_K$. Выражение $\omega \succ \Gamma_K$ будет означать, что дифференциальная форма ω является допустимой для семейства Γ_K.

Соответствующий модуль определим равенством

$$M\Omega_p(\Gamma_K) = \inf_{\omega \succ \Gamma_K} \iint\limits_G |\omega|^p \, dxdy.$$

Дифференциальные формы и векторные поля тесно связаны между собой – векторному полю $\vec{\mathbf{V}} = (P, Q)$ соответствует дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy$, при этом

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\gamma (\vec{\mathbf{V}}, \vec{\tau}) dl \quad \text{и} \quad \iint\limits_G |\omega|^p \, dxdy = \iint\limits_G |\vec{\mathbf{V}}|^p \, dxdy.$$

Поэтому

$$M\Omega_p(\Gamma_K) = MV_p(\Gamma_K) = \mathrm{mod}_p(\Gamma_K) = \mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G). \tag{6}$$

Если функция u является экстремальной для конденсатора K, то для семейства Γ_K экстремальная метрика $\rho_u = |\nabla u|$, экстремальное векторное поле $\vec{\mathbf{V}}_u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y} \right)$, экстремальная дифференциальная форма $\omega_u = \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy$.

Рассмотрим взаимосвязь различных модулей и ёмкости для семейства Σ_K^*, состоящего в данном случае из локально липшицевых кривых, разделяющих множества K_0 и K_1. Самая простая ситуация возникает в случае, когда множества K_0 и K_1 являются граничными континуумами области G.

Рассмотрим на плоскости R^2 ограниченную односвязную область G с жордановой границей Γ и четыре различные последовательные граничные точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Gamma$. Для определенности будем считать, что нумерация точек согласована с положительной ориентацией границы. Область G с отмеченными четыремя граничными точками будем называть четырехсторонником и обозначать $G_\star$, а замкнутые граничные дуги $F_0 = \Gamma_{a_4a_1}$, $F_1 = \Gamma_{a_2a_3}$, $E_0 = \Gamma_{a_1a_2}$, $E_1 = \Gamma_{a_3a_4}$ будем называть его "сторонами".

Если $0 < \mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G) < \infty$, то будем называть четырехсторонник $G_\star$ невырожденным. Равенство p-ёмкости нулю или бесконечности возможно в случае вырождения одной из "сторон" в точку.

Рассмотрим невырожденный четырехсторонник $G_\star$. Для удобства обозначим $\mathrm{cap}_p(F_0, F_1, G) = C_p$. Пусть функция u является экстремальной для p-ёмкости конденсатора $K = (F_0, F_1)$, а функция v является экстремальной для p'-ёмкости конденсатора $K^* = (E_0, E_1)$.

Функция u является p-гармонической, а сопряженная функция v является p'-гармонической. Согласно [12, 13] функции u и v связаны системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases},$$

которая при $p = 2$ и $C_p = 1$ превращается в систему Коши-Римана.

Поскольку $\nabla v \perp \nabla u$ и $C_p|\nabla v| = |\nabla u|^{p-1}$, то экстремальная для семейства Σ_K^* метрика

$$\rho_v = |\nabla v| = \frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-1} = \frac{1}{C_p}\rho_u^{p-1},$$

экстремальное векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}}_v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

экстремальная дифференциальная форма

$$\omega_v = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-2}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)$$

и

$$\mathrm{mod}_{p'}(\Gamma_K^*) = \mathrm{cap}_{p'}(E_0, E_1, G) = MV_{p'}(\Gamma_K^*) = M\Omega_{p'}(\Gamma_K^*).$$

Аналогичная ситуация будет и в случае, когда $G \cap (K_0 \cup K_1) \neq \emptyset$, при этом область $G_K = G \setminus (K_0 \cup K_1)$ является односвязной, а множества K_0 и K_1 являются связными. В области G_K следует рассмотреть "стороны" $F_0 = \partial K_0 \cap \partial G_K$ и $F_1 = \partial K_1 \cap \partial G_K$, а в качестве "сторон" E_0, E_1 дополнительные граничные дуги области G_K.

Рассмотрим в области G произвольный конденсатор $K = (K_0, K_1)$. Пусть u - экстремальная функция для p-ёмкости конденсатора K и $\mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) = C_p$. В общем случае область $G_K = G \setminus (K_0 \cup K_1)$ не является односвязной, а семейство разделяющих кривых Σ^*_K может содержать замкнутые кривые, поэтому связать однозначную экстремальную функцию с семейством Σ^*_K не удаётся. Однако соответствующая экстремальная метрика, экстремальное векторное поле и экстремальная дифференциальная форма существуют.

Символом U_t будем обозначать множество уровня экстремальной функции u, т.е.

$$U_t = \{(x,y) \in G \mid \ u(x,y) = t\}.$$

При почти всех $t \in (0,1)$ множества уровня U_t являются гладкими кривыми.

Характеристическим свойством экстремальной функции является равенство

$$\int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\, l \equiv const = C_p, \tag{7}$$

для почти всех $t \in (0,1)$ [12, 13].

Символом Γ^*_u обозначим семейство всех линий уровня U_t, для которых выполняется равенство (7). На всякой кривой γ, соединяющей множества K_0 и K_1, непрерывная экстремальная функция u принимает все промежуточные значения, т.е. кривая γ пересекает все множества U_t. Следовательно, $\Gamma^*_u \subset \Sigma^*_K$. Легко показать, что векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

является экстремальным для семейства Γ^*_u.

Векторное поле $\vec{\mathbf{W}}$ параллельно касательному вектору к линии уровня $U_t \in \Gamma^*_u$. Используя равенство (7), получаем

$$\int\limits_{U_t} (\vec{\mathbf{W}}, \vec{\tau})\, d\, l = \frac{1}{C_p} \int\limits_{U_t} |\nabla u|^{p-1}\, d\, l = 1,$$

т.е. поле $\vec{\mathbf{W}}$ является допустимым для семейства Γ^*_u.

Учитывая равенство (1), получаем оценку

$$MV_{p'}(\Gamma^*_u) \le \iint\limits_G |\vec{\mathbf{W}}|^{p'}\, dxdy = \frac{1}{C_p^{p'}} \iint\limits_G |\nabla u|^p\, dxdy = (C_p)^{-p'/p} =$$

$$\mathrm{mod}_{p'}(\Sigma^*_K).$$

Рассмотрим произвольное допустимое для семейства Γ^*_u векторное поле $\vec{\mathbf{\Lambda}}$, для которого неравенство

$$\int\limits_{U_t} |\vec{\mathbf{\Lambda}}|\, d\, l \ge \int\limits_{U_t} (\vec{\mathbf{\Lambda}}, \vec{\tau})\, d\, l \ge 1$$

выполняется при почти всех $t \in (0,1)$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по линиям уровня [14], получаем оценку

$$\iint\limits_G |\nabla u|\,|\vec{\mathbf{\Lambda}}|\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{U_t} |\vec{\mathbf{\Lambda}}|\,d\,l \right) dt \geq 1.$$

С другой стороны, согласно неравенству Гёльдера

$$1 \leq \iint\limits_G |\nabla u|\,|\vec{\mathbf{\Lambda}}|\,dxdy \leq \left(\iint\limits_G |\nabla u|^p dxdy \right)^{1/p} \left(\iint\limits_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'}\,dxdy \right)^{1/p'} =$$

$$(C_p)^{1/p} \left(\iint\limits_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'}\,dxdy \right)^{1/p'}.$$

Следовательно,

$$MV_{p'}(\Gamma_u^*) = \inf_{\vec{\mathbf{\Lambda}} \succ \Gamma_u^*} \iint\limits_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'}\,dxdy \geq (C_p)^{-p'/p} = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Таким образом, $M\mathbf{\Omega}_{p'}(\Gamma_u^*) = MV_{p'}(\Gamma_u^*) = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_K^*)$.

Семейство Γ_u^* является полным в том смысле, что его модуль равен модулю всего семейства Σ_K^*.

Пусть векторное поле $\vec{\mathbf{\Lambda}} \succ \Gamma_u^*$. Рассмотрим векторное поле $\vec{\mathbf{V}}$, получаемое поворотом векторного поля $\vec{\mathbf{\Lambda}}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Поскольку

$$\int\limits_{U_t} (\vec{\mathbf{\Lambda}}, \vec{n})dl = \int\limits_{U_t} (\vec{\mathbf{V}}, \vec{\tau})dl \quad \text{и} \quad |\vec{\mathbf{\Lambda}}| = |\vec{\mathbf{V}}|,$$

то при вычислении $MV_{p'}(\Gamma_u^*)$ в определении допустимых векторных полей вместо циркуляции векторного поля $\vec{\mathbf{\Lambda}}$ вдоль множества уровня U_t мы можем рассматривать поток векторного поля $\vec{\mathbf{V}}$ через U_t в направлении нормали $\vec{n} = \nabla u/|\nabla u|$, считая векторне поле $\vec{\mathbf{V}}$ допустимым для семейства Γ_u^*, если

$$\int\limits_{U_t} (\vec{\mathbf{V}}, \vec{n})dl \geq 1, \qquad U_t \in \Gamma_u^*.$$

Вполне очевидно, что при таком определении экстремальным будет векторное поле

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

На плоскости R^2 использование потока векторного поля в определении модулей кроме формального отличия ничего нового не добавляет.

При этом для модулей семейств поверхностей в пространстве R^3 использование потока векторного поля через поверхность оказывается естественным и полезным.

§3. Модули, векторные поля, дифференциальные формы в R^3

Рассмотрим односвязную область $G \subset R^3$, два непересекающихся континуума
$K_0, K_1 \subset \partial G$ и экстремальную для p-ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ функцию u. Пусть $0 < C_p = \operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty$.

Поскольку в данном случае Γ_K является семейством локально липшицевых кривых, то определение модулей $MV_p(\Gamma_K)$ и $M\mathbf{\Omega}_p(\Gamma_K)$ ничем не отличается от введенных ранее в плоском случае. Использование результата работы [1] и дословное повторение доказательств равенства (6), приводит к уже знакомому соотношению

$$M\Omega_p(\Gamma_K) = MV_p(\Gamma_K) = \operatorname{mod}_p(\Gamma_K) = \operatorname{cap}_p(K_0, K_1, G).$$

С семейством Σ_K^* ситуация существенно иная, поскольку в данном случае это семейство состоит из двумерных поверхностей, разделяющих континуумы K_0 и K_1. При этом некоторые оценки и методы их получения вполне аналогичны тому, что было в плоском случае.

Обозначим через Σ семейство локально липшицевых двумерных ориентированных поверхностей расположенных в области $G \subset R^3$. Непрерывное векторное поле $\vec{\mathbf{V}}$ будем называть допустимым для семейства Σ и писать $\vec{\mathbf{V}} \succ \Sigma$, если поток поля $\vec{\mathbf{V}}$ в направлении нормали $\vec{n}$ удовлетворяет оценке

$$\left| \iint\limits_S (\vec{\mathbf{V}}, \vec{n}) ds \right| \geq 1,$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$. Определим модуль $MV_p(\Sigma)$ равенством

$$MV_p(\Sigma) = \inf_{\vec{\mathbf{V}} \succ \Sigma} \iiint\limits_G |\vec{\mathbf{V}}|^p \, dxdydz.$$

Поскольку для всякого поля $\vec{\mathbf{V}} \succ \Sigma$ и всех поверхностей $S \in \Sigma$ выполняется неравенство

$$\iint\limits_S |\vec{\mathbf{V}}| ds \geq \iint\limits_S (\vec{\mathbf{V}}, \vec{n}) ds \geq 1,$$

то $|\vec{\mathbf{V}}|$ является допустимой метрикой для Σ. Следовательно,

$$MV_p(\Sigma) \geq \operatorname{mod}_p(\Sigma).$$

Дифференциальную форму $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$ будем называть допустимым для семейства Σ и писать $\omega \succ \Sigma$, если

$$\left|\iint\limits_{S} \omega\right| \geq 1, \tag{8}$$

для всех поверхностей $S\in\Sigma$. Соответствующий модуль $M\Omega_p(\Sigma)$ определим равенством

$$M\Omega_p(\Sigma) = \inf_{\omega\succ\Sigma} \iiint\limits_{G} |\omega|^p\,dxdydz.$$

Учитывая взаимосвязь векторных полей и дифференциальных форм, легко заметить, что $M\Omega_p(\Sigma) = MV_p(\Sigma)$. При этом некоторые свойства оказывается удобно формулировать в терминах векторных полей, а другие свойства в терминах дифференциальных форм.

В данном случае множество уровня экстремальной функции u будем обозначать символом S_t т.е.

$$S_t = \{(x,y,z)\in G\mid\ \ u(x,y,z) = t\}.$$

При почти всех $t\in(0,1)$ множество уровня S_t является гладкой поверхностью, разделяющей континуумы K_0 и K_1. Далее будем считать, что поверхность S_t ориентирована вектором нормали, совпадающим по направлению с градиентом функции u, а край поверхности имеет согласованную ориентацию.

Как и плоском случае интеграл от $|\nabla u|^{p-1}$ по множествам уровня принимает постоянное значение

$$\iint\limits_{S_t} |\nabla u|^{p-1}\,d\,s \equiv const = C_p, \tag{9}$$

для почти всех $t\in(0,1)$. Доказательство этого свойства дословно повторяет доказательство леммы 1.1 работы [13] с единственным изменением – формальной заменой интеграла по линии уровня U_t на поверхностный интеграл по S_t.

Символом Σ_u^* обозначим семейство всех гладких поверхностей S_t, для которых выполняется равенство (9).

Рассмотрим векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-2}\nabla u$$

и соответствующую дифференциальную форму

$$\omega_u = \frac{1}{C_p}|\nabla u|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y}\,dz\wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z}\,dx\wedge dy\right)$$

Для всех $S_t \in \Sigma_u^*$

$$\iint\limits_{S_t} \omega_u = \iint\limits_{S_t} (\vec{\mathbf{W}}, \vec{n}) ds = \frac{1}{C_p} \iint\limits_{S_t} |\nabla u|^{p-1} \, ds = 1,$$

где $\vec{n} = \nabla u / |\nabla u|$. Следовательно, поле $\vec{\mathbf{W}}$ допустимо для семейства Σ_u^*.

При этом

$$MV_{p'}(\Sigma_u^*) \le \iiint\limits_G |\vec{\mathbf{W}}|^{p'} \, dxdydz = \frac{1}{C_p^{p'}} \iiint\limits_G |\nabla u|^p \, dxdydz = (C_p)^{-p'/p} =$$

$$\operatorname{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Рассмотрим произвольное допустимое для семейства Σ_u^* векторное поле $\vec{\mathbf{\Lambda}}$, для которого неравенство

$$\iint\limits_{S_t} |\vec{\mathbf{\Lambda}}| \, ds \ge \left| \iint\limits_{S_t} (\vec{\mathbf{\Lambda}}, \vec{n}) \, ds \right| \ge 1$$

выполняется при почти всех $t \in (0, 1)$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по множествам уровня функции u [14], получаем оценку

$$\iiint\limits_G |\nabla u| \, |\vec{\mathbf{\Lambda}}| \, dxdydz = \int\limits_0^1 \left(\iint\limits_{S_t} |\vec{\mathbf{\Lambda}}| \, d\, l \right) \, dt \ge 1.$$

С другой стороны, согласно неравенству Гёльдера

$$1 \le \iiint\limits_G |\nabla u| \, |\vec{\mathbf{\Lambda}}| \, dxdydz \le$$

$$\left(\iiint\limits_G |\nabla u|^p dxdydz \right)^{1/p} \left(\iint\limits_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'} \, dxdydz \right)^{1/p'} =$$

$$(C_p)^{1/p} \left(\iiint\limits_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'} \, dxdydz \right)^{1/p'}.$$

Следовательно,

$$MV_{p'}(\Sigma_u^*) = \inf_{\vec{\mathbf{\Lambda}} \succ \Sigma_u^*} \iiint\limits_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'} \, dxdydz \ge (C_p)^{-p'/p} = \operatorname{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Аналогичные оценки выполняются и для связанной с векторным полем $\vec{\mathbf{\Lambda}}$ дифференциальной 2-формы $\omega_{\vec{\mathbf{\Lambda}}}$.

Таким образом, $M\mathbf{\Omega}_{p'}(\Sigma_u^*) = MV_{p'}(\Sigma_u^*) = \operatorname{mod}_{p'}(\Sigma_K^*)$.

Семейство Σ_u^* является полным в том смысле, что его модуль равен модулю всего семейства Σ_K^*.

Пример 2. Рассмотрим на плоскости R^2 ограниченную область D с кусочно гладкой границей γ. В R^3 рассмотрим цилиндрическую область $G = D \times (0, h)$ и конденсатор $K = (K_0, K_1)$, у которого K_0 является нижним основанием цилиндра G, а K_1 верхним основанием. Площадь области D обозначим символом $|D|$.

Если функция v является допустимой для конденсатора K, то на почти всех вертикальных отрезках, соединяющих основания

$$1 \le \int\limits_0^h |\nabla v|\, dz \le h^{1/p'} \left(\int\limits_0^h |\nabla v|^p\, dz \right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_G |\nabla v|^p\, dxdydz \ge \frac{|D|}{h^{p-1}}.$$

Легко заметить, что в данном случае экстремальная функция является линейной

$$u(x,y,z) = \frac{z}{h} \quad \text{и} \quad \mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) = \frac{|D|}{h^{p-1}}.$$

В данном случае векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u = \frac{1}{|D|}\, \vec{k},$$

а соответствующая дифференциальная 2-форма

$$\omega_u = \frac{1}{|D|}\, dx \wedge dy.$$

Форма ω_u является точной и имеет первообразную

$$\Omega_u = \frac{1}{2|D|} \left(-y\, dx + x\, dy \right).$$

Семейство поверхностей Σ_u^* состоит из сечений цилиндра G плоскостями ортогональными вектору $\vec{k}$, опредедяющему ориентацию сечений. Если поверхность $S_t \in \Sigma_u^*$, то её край γ_t конгруэнтен кривой γ - границе области D. Семейство всех кривых γ_t обозначим символом Γ. Согласно формуле Стокса для всякой кривой $\gamma_t \in \Gamma$

$$\int\limits_{\gamma_t} \Omega_u = \iint\limits_{S_t} d\Omega_u = \iint\limits_{S_t} \omega_u = 1.$$

Гладкую в G и непрерывную в $\overline{G}$ дифференциальную 1-форму Ω будем называть допустимой для семейства Γ, если для всякой кривой $\gamma_t \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\gamma_t} \Omega \ge 1.$$

Множество всех допустимых для семейства Γ дифференциальных форм обозначим символом $\mathbf{F}(\Gamma)$.

Если дифференциальная форма Ω допустима для семейства Γ, то

$$1 \leq \int\limits_{\gamma_t} \Omega = \iint\limits_{S_t} d\Omega.$$

Следовательно, дифференциальная 2-форма $d\Omega$ является допустимой для семейства Σ_u^* и, как ранее доказано

$$\iiint\limits_G |d\Omega|^{p'}\, dxdydz \geq \iiint\limits_G |\omega_u|^{p'}\, dxdydz = \frac{h}{|D|^{p'-1}} = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Следовательно,

$$\mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_K^*) = \inf_{\Omega \in \mathbf{F}(\Gamma)} \iiint\limits_G |d\Omega|^{p'}\, dxdydz.$$

Таким образом, при нахождении модуля семейства Σ_u^* мы можем вместо допустимых дифференциальных форм второй степени использовать класс допустимых дифференциальных форм первой степени. При этом конструкция становится похожей на определение ёмкости конденсатора, в котором используются допустимые функции - "формы нулевой степени". ■

Рассмотрим односвязную компактную область $\overline{G} \subset R^3$, два непересекающихся континуума $K_0, K_1 \subset \partial G$ и экстремальную для p-ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ функцию u. Сохраним обозначение Σ_u^* для определенного ранее семейства множеств уровня функции u. Пусть

$$0 < C_p = \mathrm{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty.$$

Поскольку экстремальная функция u является p-гармонической, то векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u$$

является бездивергентным в слабом смысле, т.е.

$$\iiint\limits_G \left(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u, \nabla \varphi\right) dxdydz = 0 \qquad (10)$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Предположим далее, что поле $\vec{\mathbf{W}}$ является гладким. В этом случае оно является бездивергентным в классическом смысле

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u) = 0.$$

При этом дифференциальная форма

$$\omega_u = |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y}\, dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z}\, dx \wedge dy \right)$$

будет замкнутой, поскольку

$$d\omega_u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u)\, dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

По теореме Пуанкаре замкнутая в односвязной области форма ω_u является точной и у неё существует первообразная, т.е. существует такая гладкая 1-форма Ω_u, что $d\Omega_u = \omega_u$.

Рассмотрим поверхность $S_t \in \Sigma_u^*$ и обозначим её край символом γ_t. Кривая $\gamma_t \subset \partial G$, является замкнутой и разделяет континуумы K_0 и K_1 как подмножества ∂G. Семейство всех таких кривых γ_t обозначим символом Γ.

Если все кривые $\gamma_t \in \Gamma$ является кусочно гладкими, а форма Ω_u допускает непрерывное продолжение на множество $\partial G \setminus (K_0 \cup K_1)$, то согласно теореме Стокса

$$\int\limits_{\gamma_t} \Omega_u = \iint\limits_{S_t} d\Omega_u = \iint\limits_{S_t} \omega_u = \iint\limits_{S_t} (\vec{\mathbf{W}}, \vec{n}) ds = 1.$$

Таким образом, 2-форма $d\Omega_u$ является допустимой для семейства поверхностей Σ_u^* и

$$\iiint\limits_G |d\Omega_u|^{p'}\, dxdydz = \iiint\limits_G |\omega_u|^{p'}\, dxdydz = M\mathbf{\Omega}_{p'}(\Sigma_u^*) = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_u^*).$$

Как и в примере 2, гладкую в G и непрерывную в $\overline{G} \setminus (K_0 \cup K_1)$ дифференциальную 1-форму Ω будем называть допустимой для семейства Γ и использовать обозначение $\Omega \succ \Gamma$, если для всякой кривой $\gamma_t \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\gamma_t} \Omega \geq 1. \tag{11}$$

Множество всех допустимых для семейства Γ дифференциальных форм обозначим символом $\mathbf{F}(\Gamma)$ и определим "ёмкость" семейства поверхностей Σ_u^* равенством

$$CAP_{p'}(\Sigma_u^*) = \inf_{\Omega \succ \mathbf{F}(\Gamma)} \iiint\limits_G |d\Omega|^{p'}\, dxdydz.$$

Если дифференциальная 1-форма Ω допустима для семейства Γ, то

$$1 \leq \int\limits_{\gamma_t} \Omega = \iint\limits_{S_t} d\Omega.$$

Следовательно, дифференциальная 2-форма $d\Omega$ является допустимой для семейства Σ_u^* и, как ранее доказано,

$$\iiint\limits_G |d\Omega|^{p'}\, dxdydz \geq \iiint\limits_G |\omega_u|^{p'}\, dxdydz = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_u^*).$$

Таким образом,

$$CAP_{p'}(\Sigma_u^*) = M\mathbf{\Omega}_{p'}(\Sigma_u^*) = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_u^*) = \mathrm{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Замечание 1. Приведенное в работе определение ёмкости семейства поверхностей $CAP_{p'}(\Sigma_u^*)$ вполне аналогично стандартному определению ёмкости конденсатора с учетом единственной замены допустимой функции (0-формы) на допустимую 1-форму. При этом приращение функции $u(b) - u(a) = 1 (a \in K_0, b \in K_1)$ можно интерпретитовать как интеграл по краю кривой, состоящему из двух *противоположно ориентированных* точек.

Замечание 2. Достаточно очевидно, что можно определить понятие ёмкости и для произвольного семейства кусочно гладких поверхностей. При этом можно отказаться от требования кусочной гладкости края поверхности S, заменяя условие (11) неравенством

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{l_n} \Omega \geq 1,$$

где $\{l_n\}$ - последовательность лежащих на поверхности S вложенных кусочно гладких замкнутых контуров, стягивающихся к краю поверхности.

Замечание 3. По содержанию данная работа является расширенной постановкой задачи, содержащей модельные примеры и позволяющей по-новому взглянуть на некоторые, на наш взгляд, интересные факты теории p-модулей семейств поверхностей. Для более обстоятельного изучения вопроса в R^3 и возможности отказаться от априорных предположений требуется получение предварительных результатов, связанных с регулярностью экстремальных функций. По аналогии с работой B. Fuglede [4], в которой рассматриваются безвихревые поля, видимо, можно доказать, что бездивергентное в слабом смысле поле $\vec{\mathbf{W}}$ (равенство 10) имеет векторный потенциал, принадлежащий пространству Соболева.

В пространствах R^n при $n > 3$ возникают дополнительные вопросы, связанные с существованием k-мерных поверхностей промежуточной размерности.

References

[1] W.P. Ziemer, *Extremal length and p-capacity*, Mich. Math. J., **16**:1 (1969), 43–51. Zbl 0172.38701

[2] J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality*, Ark. Mat., **13**:1-2 (1975), 131–144. Zbl 0302.31009

[3] P. Caraman, *New cases of equality between p-module and p-capacity*, Ann. Pol. Math., **55**:1-3 (1991), 37–56. Zbl 0748.31003

[4] B. Fuglede, *Extremal lenght and functional completion*, Acta Math., **98**:3-4, (1957), 171–219. Zbl 0079.27703

[5] N.N. Ural'tseva, *Entartende quasilineare elliptische Systeme*, Zap. Nauch. Sem. LOMI, **7** (1968), 184–222. Zbl 0196.12501

[6] J. Lewis, *Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., **32**:6, (1983), 849–858. Zbl 0554.35048

[7] V.M. Gold'shtein, Yu.G. Reshetnyak, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht etc., 1990. Zbl 0687.30001

[8] A.S. Romanov *Properties of extremal functions for p-capacity in* R^2, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:2, (2021), 845–866. MR4302882

[9] V.A. Shlyk, *Capacity of a condenser and the modulus of a family of separating surfaces*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **185** (1990), 168–182. Zbl 0734.31008

[10] T. Iwaniec, J.J. Manfredi, *Regularity of p-harmonic functions on the plane*, Rev. Mat. Iberoam., **5**:1-2, (1989), 1–19. Zbl 0805.31003

[11] J.J. Manfredi, *p-harmonic functions in the plane*, Proc. AMS, **103**:2 (1988), 473–479. Zbl 0658.35041

[12] A.S. Romanov *Capacity relations in a flat quadrilateral*, Sib. Math. J., **49**:4 (2008), 709–717. Zbl 1164.30368

[13] A.S. Romanov *Mappings related to extremal functions for p-capacity*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **16**, (2019), 1295–1311. Zbl 1431.30024

[14] V.G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1985. Zbl 0692.46023

[15] A.S. Romanov *Extremality of p-harmonic functions in* R^2, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:2 (2021), 1015–1022. Zbl 1476.35112

Alexandr Sergeevich Romanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: asrom@math.nsc.ru