

**МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ВЕКТОРНЫЕ
ПОЛЯ, ЕМКОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ**

А.С. РОМАНОВ

Abstract: We study the relationships between p -module of a system of surfaces, vector fields, capacity and differential forms.

Keywords: p -modules, vector fields, capacity, differential forms.

В теории квазиконформных, квазиизометрических и других классов отображений, связанных с пространствами Соболева, важную роль играют понятия вариационной ёмкости и модуля семейств кривых и поверхностей, позволяющие получить адекватное описание различных свойств рассматриваемых отображений. Нас интересуют взаимосвязи модулей семейств кривых и модулей семейств поверхностей с нелинейной ёмкостью, векторными полями и дифференциальными формами.

Связь p -ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ с p -модулем семейства кривых, соединяющих множества K_0 и K_1 давно известна [1, 2, 3]. С.К. Водопьянов высказал гипотезу, что p -модули некоторых других семейств кривых и поверхностей можно связать с ёмкостью, в определении которой вместо класса допустимых функций используется соответствующий класс допустимых дифференциальных форм.

ROMANOV, A.S., MODULES OF A SYSTEM OF SURFACES, VECTOR FIELDS, CAPACITY, DIFFERENTIAL FORMS.

© 2024 РОМАНОВ А.С.

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).

Поступила ????, опубликована ??? г.

Данную заметку можно рассматривать как иллюстрацию к гипотезе С.К. Водопьянова. Мы не стремимся к рассмотрению вопроса в максимальной общности, но хотим отметить некоторые, на наш взгляд, интересные факты и свойства, выполняющиеся в модельных случаях. Вначале более подробно рассматривается ситуация в R^2 , а затем при некоторых априорных предположениях модельная ситуация в R^3 .

§1. Модули семейств поверхностей и вариационная ёмкость

Следуя работе [4], стандартным образом определим понятие p -модуля семейства поверхностей (кривых).

Пусть область $G \subset R^n$ и $1 \leq k \leq n - 1$. Для обозначения k -мерной меры Хаусдорфа будем использовать символ H^k , для меры Лебега в R^n символ m_n .

Семейство k -мерных локально липшицевых поверхностей (кривых при $k = 1$) в области G обозначим символом Σ . Неотрицательную борелевскую функцию $\rho : G \rightarrow \bar{R}$ называют допустимой метрикой для семейства Σ , если

$$\int_S \rho dH^k \geq 1$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$. Далее выражение $\rho \succ \Sigma$ будет означать, что метрика ρ является допустимой для семейства Σ .

При $1 < p < \infty$ определим p -модуль семейства Σ равенством

$$\text{mod}_p(\Sigma) = \inf_{\rho \succ \Sigma} \int_G \rho^p dm_n.$$

Множество допустимых метрик является выпуклым. При $p > 1$ пространство Лебега $L_p(G)$ является равномерно выпуклым, поэтому существует единственная экстремальная метрика ρ_0 , для которой

$$\text{mod}_p(\Sigma) = \int_G \rho_0^p dm_n.$$

Рассмотрим два непересекающихся компакта $K_0, K_1 \subset \bar{G}$. Класс допустимых функций для конденсатора $K = (K_0, K_1)$ при $1 < p < \infty$ определим условием

$$D(K_0, K_1, G) = \{u \in L_p^1(G) \cap C(G \cup K_0 \cup K_1) \mid u|_{K_0} = 0, u|_{K_1} = 1\},$$

а соответствующую вариационную p -ёмкость определим равенством

$$\text{cap}_p(K_0, K_1, G) = \inf_{u \in D(K_0, K_1, G)} \int_G |\nabla u|^p dm_n.$$

При $p > 1$ существует единственная экстремальная функция

$$u_0 \in \overline{D(K_0, K_1, G)} \cap L_p^1(G)$$

такая, что

$$\text{cap}_p(K_0, K_1, G) = \int_G |\nabla u_0|^p dm_n.$$

В данном случае уравнение Эйлера-Лагранжа для p -интеграла Дирихле имеет вид

$$\int_G (|\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi) dm_n = 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Следовательно, экстремальная функция является слабым решением p -уравнения Лапласа

$$\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) = 0,$$

иными словами является p -гармонической.

Известно, что всякая p -гармоническая функция является гладкой и принадлежит классу $C_{loc}^{1,\alpha}(G)$, $\alpha > 0$ [5, 6].

Вообще говоря, в определении p -ёмкости могут быть использованы и другие классы допустимых функций, на которых нижняя грань значений p -интеграла Дирихле равна $\text{cap}_p(K_0, K_1, G)$. Довольно подробное обсуждение свойств вариационной ёмкости можно найти в работах [7, 8].

Понятие модуля является более общим чем ёмкость, поскольку p -модуль может быть определён для семейств кривых и семейств поверхностей, которые не связаны с какой-либо парой множеств K_0 и K_1 . При этом с каждым конденсатором $K = (K_0, K_1)$ связаны два специальных семейства:

- 1) Γ_K - семейство всех локально липшицевых кривых, лежащих в области G и соединяющих множества K_0 и K_1 ;
- 2) Σ_K^* - семейство всех локально липшицевых гиперповерхностей, лежащих в области G и разделяющих множества K_0 и K_1 .

Согласно результату работы [9]

$$\text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*) = [\text{cap}_p(K_0, K_1, G)]^{-p'/p}, \quad (1)$$

здесь $1/p + 1/p' = 1$.

В работах [1, 2, 3] показано, что

$$\text{mod}_p(\Gamma_K) = \text{cap}_p(K_0, K_1, G). \quad (2)$$

Это позволяет записать равенство (1) в более симметричном виде

$$[\text{mod}_p(\Gamma_K)]^{1/p} \cdot [\text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*)]^{1/p'} = 1, \quad (3)$$

§2. Модули, ёмкость, векторные поля, дифференциальные формы в R^2

На плоскости R^2 о свойствах p -гармонических функций и, как следствие, о свойствах экстремальных функций для p -ёмкости известно больше чем в пространствах более высокой размерности. Поэтому мы начнём с наиболее простого и наглядного плоского случая.

Пусть область $G \subset R^2$. Как уже отмечалось, p -гармонические функции являются гладкими и принадлежат классу $C_{loc}^{1,\alpha}(G)$, $\alpha > 0$. При этом в плоской области G у всякой p -гармонической функции u множество критических точек

$$Z = \{(x, y) \in G \mid \nabla u(x, y) = 0\}$$

является дискретным и $u \in C_0^\infty(G \setminus Z)$ [10, 11].

Обозначим через Γ семейство локально липшицевых ориентированных кривых, расположенных в области $G \subset R^2$. Непрерывное векторное поле \vec{V} будем называть допустимым для семейства Γ , если для всех кривых $\gamma \in \Gamma$ выполняется оценка

$$\left| \int_{\gamma} (\vec{V}, \vec{\tau}) dl \right| \geq 1,$$

где $\vec{\tau}$ - единичный касательный вектор к кривой γ . Далее выражение $\vec{V} \succ \Gamma$ будет означать, что векторное поле \vec{V} является допустимым для семейства Γ . Если $\vec{V} \succ \Gamma$, то, меняя при необходимости ориентацию некоторых кривых на противоположную, можно добиться выполнения неравенства

$$\int_{\gamma} (\vec{V}, \vec{\tau}) dl \geq 1.$$

Определим модуль $MV_p(\Gamma)$ равенством

$$MV_p(\Gamma) = \inf_{\vec{V} \succ \Gamma} \iint_G |\vec{V}|^p dx dy.$$

Поскольку для всякого поля $\vec{V} \succ \Gamma$ и всех кривых $\gamma \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\int_{\gamma} |\vec{V}| dl \geq \left| \int_{\gamma} (\vec{V}, \vec{\tau}) dl \right| \geq 1,$$

то $|\vec{V}|$ является допустимой метрикой для Γ . Следовательно,

$$MV_p(\Gamma) \geq \text{mod}_p(\Gamma). \quad (4)$$

Противоположное неравенство в общем случае не выполняется.

Пример 1. На плоскости R^2 рассмотрим квадрат

$$Q = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

и два семейства отрезков: A - горизонтальных отрезков, соединяющих боковые стороны квадрата, и B - вертикальных отрезков, соединяющих основания квадрата. Будем считать отрезки ориентированными, с началом на соответствующей оси координат.

Если метрика ρ является допустимой для семейства A , то

$$1 \leq \int_0^1 \rho dx \leq \left(\int_0^1 \rho^p dx \right)^{1/p}$$

и

$$\iint_Q \rho^p dx dy \geq 1.$$

Поэтому метрика $\rho_0 \equiv 1$ является экстремальной для семейства A и $\text{mod}_p(A) = 1$.

Вполне очевидно, что метрика $\rho_0 \equiv 1$ является экстремальной и для семейств B и $C = A \cup B$. При этом

$$\text{mod}_p(A) = \text{mod}_p(B) = \text{mod}_p(C) = 1.$$

Легко заметить, что экстремальное для семейства A векторное поле \vec{V}_A в каждой точке параллельно вектору $\vec{e}_1 = (1, 0)$ и $|\vec{V}_A| \equiv 1$, экстремальное для семейства B векторное поле \vec{V}_B в каждой точке параллельно вектору $\vec{e}_2 = (0, 1)$ и $|\vec{V}_B| \equiv 1$.

Семейства A и B симметричны относительно диагонали квадрата, поэтому экстремальное для семейства C векторное поле \vec{V}_C параллельно диагонали, а его проекции на горизонтальные отрезки совпадают с полем \vec{V}_A и в силу симметрии проекции на вертикальные отрезки совпадают с полем \vec{V}_B . Следовательно, в каждой точке $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_B$ и $|\vec{V}_C| \equiv \sqrt{2}$. Поэтому

$$MV_p(A) = \text{mod}_p(A) = 1, \quad MV_p(B) = \text{mod}_p(B) = 1,$$

$$MV_p(C) = 2^{p/2} > \text{mod}_p(C) = 1. \quad \blacksquare$$

Семейство C имеет весьма специфическую структуру: часть принадлежащих ему отрезков соединяет противоположные стороны, а другая часть эти же стороны разделяет. Обычно рассматриваются семейства кривых устроенные более регулярным образом.

Рассмотрим конденсатор $K = (K_0, K_1) \subset \bar{G}$ и семейство Γ_K - всех локально липшицевых кривых в области G , соединяющих множество K_0 с множеством K_1 и ориентированных естественным образом. Несложно показать, что $MV_p(\Gamma_K) = \text{mod}_p(\Gamma_K)$.

Если функция u является экстремальной для конденсатора K , то для всех кривых $\gamma \in \Gamma_K$

$$\int_{\gamma} (\nabla u, \vec{\tau}) dl \geq 1,$$

т.е. $\nabla u \succ \Gamma_K$. Поэтому

$$MV_p(\Gamma_K) \leq \text{cap}_p(K_0, K_1). \quad (5)$$

Из неравенств (4) и (5) и равенства (2) следует

$$MV_p(\Gamma_K) = \text{mod}_p(\Gamma_K) = \text{cap}_p(K_0, K_1).$$

Для семейства Γ_K можно определить модуль $M\Omega_p(\Gamma_K)$, связанный с дифференциальными формами. Дифференциальную форму $\omega = Pdx + Qdy$ будем называть допустимой для семейства Γ_K , если

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \geq 1,$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma_K$. Выражение $\omega \succ \Gamma_K$ будет означать, что дифференциальная форма ω является допустимой для семейства Γ_K .

Соответствующий модуль определим равенством

$$M\Omega_p(\Gamma_K) = \inf_{\omega \succ \Gamma_K} \iint_G |\omega|^p dx dy.$$

Дифференциальные формы и векторные поля тесно связаны между собой – векторному полю $\vec{V} = (P, Q)$ соответствует дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy$, при этом

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} (\vec{V}, \vec{\tau}) dl \quad \text{и} \quad \iint_G |\omega|^p dx dy = \iint_G |\vec{V}|^p dx dy.$$

Поэтому

$$M\Omega_p(\Gamma_K) = MV_p(\Gamma_K) = \text{mod}_p(\Gamma_K) = \text{cap}_p(K_0, K_1, G). \quad (6)$$

Если функция u является экстремальной для конденсатора K , то для семейства Γ_K экстремальная метрика $\rho_u = |\nabla u|$, экстремальное векторное поле $\vec{V}_u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, экстремальная дифференциальная форма

$$\omega_u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Рассмотрим взаимосвязь различных модулей и ёмкости для семейства Σ_K^* , состоящего в данном случае из локально липшицевых кривых, разделяющих множества K_0 и K_1 . Самая простая ситуация возникает в случае, когда множества K_0 и K_1 являются граничными континуумами области G .

Рассмотрим на плоскости R^2 ограниченную односвязную область G с жордановой границей Γ и четыре различные последовательные граничные точки $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Gamma$. Для определенности будем считать, что нумерация точек согласована с положительной ориентацией границы. Область G с отмеченными четырьмя граничными точками будем называть четырехсторонником и обозначать G_* , а замкнутые граничные дуги $F_0 = \Gamma_{a_4a_1}$, $F_1 = \Gamma_{a_2a_3}$, $E_0 = \Gamma_{a_1a_2}$, $E_1 = \Gamma_{a_3a_4}$ будем называть его "сторонами".

Если $0 < \text{cap}_p(F_0, F_1, G) < \infty$, то будем называть четырехсторонник G_* невырожденным. Равенство p -ёмкости нулю или бесконечности возможно в случае вырождения одной из "сторон" в точку.

Рассмотрим невырожденный четырехсторонник G_* . Для удобства обозначим $\text{cap}_p(F_0, F_1, G) = C_p$. Пусть функция u является экстремальной для p -ёмкости конденсатора $K = (F_0, F_1)$, а функция v является экстремальной для p' -ёмкости конденсатора $K^* = (E_0, E_1)$.

Функция u является p -гармонической, а сопряженная функция v является p' -гармонической. Согласно [12, 13] функции u и v связаны системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases},$$

которая при $p = 2$ и $C_p = 1$ превращается в систему Коши-Римана.

Поскольку $\nabla v \perp \nabla u$ и $C_p |\nabla v| = |\nabla u|^{p-1}$, то экстремальная для семейства Σ_K^* метрика

$$\rho_v = |\nabla v| = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-1} = \frac{1}{C_p} \rho_u^{p-1},$$

экстремальное векторное поле

$$\vec{W}_v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

экстремальная дифференциальная форма

$$\omega_v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

и

$$\text{mod}_{p'}(\Gamma_K^*) = \text{cap}_{p'}(E_0, E_1, G) = MV_{p'}(\Gamma_K^*) = M\Omega_{p'}(\Gamma_K^*).$$

Аналогичная ситуация будет и в случае, когда $G \cap (K_0 \cup K_1) \neq \emptyset$, при этом область $G_K = G \setminus (K_0 \cup K_1)$ является односвязной, а множества K_0 и K_1 являются связными. В области G_K следует рассмотреть "стороны" $F_0 = \partial K_0 \cap \partial G_K$ и $F_1 = \partial K_1 \cap \partial G_K$, а в качестве "сторон" E_0, E_1 дополнительные граничные дуги области G_K .

Рассмотрим в области G произвольный конденсатор $K = (K_0, K_1)$. Пусть u - экстремальная функция для p -ёмкости конденсатора K и $\text{cap}_p(K_0, K_1, G) = C_p$. В общем случае область $G_K = G \setminus (K_0 \cup K_1)$ не

является односвязной, а семейство разделяющих кривых Σ_K^* может содержать замкнутые кривые, поэтому связать однозначную экстремальную функцию с семейством Σ_K^* не удаётся. Однако соответствующая экстремальная метрика, экстремальное векторное поле и экстремальная дифференциальная форма существуют.

Символом U_t будем обозначать множество уровня экстремальной функции u , т.е.

$$U_t = \{(x, y) \in G \mid u(x, y) = t\}.$$

При почти всех $t \in (0, 1)$ множества уровня U_t являются гладкими кривыми.

Характеристическим свойством экстремальной функции является равенство

$$\int_{U_t} |\nabla u|^{p-1} dl \equiv const = C_p, \quad (7)$$

для почти всех $t \in (0, 1)$ [12, 13].

Символом Γ_u^* обозначим семейство всех линий уровня U_t , для которых выполняется равенство (7). На всякой кривой γ , соединяющей множества K_0 и K_1 , непрерывная экстремальная функция u принимает все промежуточные значения, т.е. кривая γ пересекает все множества U_t . Следовательно, $\Gamma_u^* \subset \Sigma_K^*$. Легко показать, что векторное поле

$$\vec{W} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

является экстремальным для семейства Γ_u^* .

Векторное поле \vec{W} параллельно касательному вектору к линии уровня $U_t \in \Gamma_u^*$. Используя равенство (7), получаем

$$\int_{U_t} (\vec{W}, \vec{\tau}) dl = \frac{1}{C_p} \int_{U_t} |\nabla u|^{p-1} dl = 1,$$

т.е. поле \vec{W} является допустимым для семейства Γ_u^* .

Учитывая равенство (1), получаем оценку

$$MV_{p'}(\Gamma_u^*) \leq \iint_G |\vec{W}|^{p'} dx dy = \frac{1}{C_p^{p'}} \iint_G |\nabla u|^p dx dy = (C_p)^{-p'/p} = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Рассмотрим произвольное допустимое для семейства Γ_u^* векторное поле \vec{A} , для которого неравенство

$$\int_{U_t} |\vec{A}| dl \geq \int_{U_t} (\vec{A}, \vec{\tau}) dl \geq 1$$

выполняется при почти всех $t \in (0, 1)$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по линиям уровня [14], получаем оценку

$$\iint_G |\nabla u| |\vec{\Lambda}| dx dy = \int_0^1 \left(\int_{U_t} |\vec{\Lambda}| dl \right) dt \geq 1.$$

С другой стороны, согласно неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} 1 \leq \iint_G |\nabla u| |\vec{\Lambda}| dx dy &\leq \left(\iint_G |\nabla u|^p dx dy \right)^{1/p} \left(\iint_G |\vec{\Lambda}|^{p'} dx dy \right)^{1/p'} = \\ &= (C_p)^{1/p} \left(\iint_G |\vec{\Lambda}|^{p'} dx dy \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$MV_{p'}(\Gamma_u^*) = \inf_{\vec{\Lambda} \succ \Gamma_u^*} \iint_G |\vec{\Lambda}|^{p'} dx dy \geq (C_p)^{-p'/p} = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Таким образом, $M\Omega_{p'}(\Gamma_u^*) = MV_{p'}(\Gamma_u^*) = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*)$.

Семейство Γ_u^* является полным в том смысле, что его модуль равен модулю всего семейства Σ_K^* .

Пусть векторное поле $\vec{\Lambda} \succ \Gamma_u^*$. Рассмотрим векторное поле \vec{V} , получаемое поворотом векторного поля $\vec{\Lambda}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

Поскольку

$$\int_{U_t} (\vec{\Lambda}, \vec{n}) dl = \int_{U_t} (\vec{V}, \vec{\tau}) dl \quad \text{и} \quad |\vec{\Lambda}| = |\vec{V}|,$$

то при вычислении $MV_{p'}(\Gamma_u^*)$ в определении допустимых векторных полей вместо циркуляции векторного поля $\vec{\Lambda}$ вдоль множества уровня U_t мы можем рассматривать поток векторного поля \vec{V} через U_t в направлении нормали $\vec{n} = \nabla u / |\nabla u|$, считая векторное поле \vec{V} допустимым для семейства Γ_u^* , если

$$\int_{U_t} (\vec{V}, \vec{n}) dl \geq 1, \quad U_t \in \Gamma_u^*.$$

Вполне очевидно, что при таком определении экстремальным будет векторное поле

$$\vec{V} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

На плоскости R^2 использование потока векторного поля в определении модулей кроме формального отличия ничего нового не добавляет.

При этом для модулей семейств поверхностей в пространстве R^3 использование потока векторного поля через поверхность оказывается естественным и полезным.

§3. Модули, векторные поля, дифференциальные формы в R^3

Рассмотрим односвязную область $G \subset R^3$, два непересекающихся континуума

$K_0, K_1 \subset \partial G$ и экстремальную для p -ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ функцию u . Пусть $0 < C_p = \text{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty$.

Поскольку в данном случае Γ_K является семейством локально липшицевых кривых, то определение модулей $MV_p(\Gamma_K)$ и $M\Omega_p(\Gamma_K)$ ничем не отличается от введенных ранее в плоском случае. Использование результата работы [1] и дословное повторение доказательств равенства (6), приводит к уже знакомому соотношению

$$M\Omega_p(\Gamma_K) = MV_p(\Gamma_K) = \text{mod}_p(\Gamma_K) = \text{cap}_p(K_0, K_1, G).$$

С семейством Σ_K^* ситуация существенно иная, поскольку в данном случае это семейство состоит из двумерных поверхностей, разделяющих континуумы K_0 и K_1 . При этом некоторые оценки и методы их получения вполне аналогичны тому, что было в плоском случае.

Обозначим через Σ семейство локально липшицевых двумерных ориентированных поверхностей расположенных в области $G \subset R^3$. Непрерывное векторное поле \vec{V} будем называть допустимым для семейства Σ и писать $\vec{V} \succ \Sigma$, если поток поля \vec{V} в направлении нормали \vec{n} удовлетворяет оценке

$$\left| \iint_S (\vec{V}, \vec{n}) ds \right| \geq 1,$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$. Определим модуль $MV_p(\Sigma)$ равенством

$$MV_p(\Sigma) = \inf_{\vec{V} \succ \Sigma} \iiint_G |\vec{V}|^p dx dy dz.$$

Поскольку для всякого поля $\vec{V} \succ \Sigma$ и всех поверхностей $S \in \Sigma$ выполняется неравенство

$$\iint_S |\vec{V}| ds \geq \iint_S (\vec{V}, \vec{n}) ds \geq 1,$$

то $|\vec{V}|$ является допустимой метрикой для Σ . Следовательно,

$$MV_p(\Sigma) \geq \text{mod}_p(\Sigma).$$

Дифференциальную форму $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ будем называть допустимым для семейства Σ и писать $\omega \succ \Sigma$, если

$$\left| \iint_S \omega \right| \geq 1, \quad (8)$$

для всех поверхностей $S \in \Sigma$. Соответствующий модуль $M\Omega_p(\Sigma)$ определим равенством

$$M\Omega_p(\Sigma) = \inf_{\omega \succ \Sigma} \iiint_G |\omega|^p dx dy dz.$$

Учитывая взаимосвязь векторных полей и дифференциальных форм, легко заметить, что $M\Omega_p(\Sigma) = MV_p(\Sigma)$. При этом некоторые свойства оказывается удобно формулировать в терминах векторных полей, а другие свойства в терминах дифференциальных форм.

В данном случае множество уровня экстремальной функции u будем обозначать символом S_t т.е.

$$S_t = \{(x, y, z) \in G \mid u(x, y, z) = t\}.$$

При почти всех $t \in (0, 1)$ множество уровня S_t является гладкой поверхностью, разделяющей континуумы K_0 и K_1 . Далее будем считать, что поверхность S_t ориентирована вектором нормали, совпадающим по направлению с градиентом функции u , а край поверхности имеет согласованную ориентацию.

Как и в плоском случае интеграл от $|\nabla u|^{p-1}$ по множествам уровня принимает постоянное значение

$$\iint_{S_t} |\nabla u|^{p-1} ds \equiv const = C_p, \quad (9)$$

для почти всех $t \in (0, 1)$. Доказательство этого свойства дословно повторяет доказательство леммы 1.1 работы [13] с единственным изменением – формальной заменой интеграла по линии уровня U_t на поверхностный интеграл по S_t .

Символом Σ_u^* обозначим семейство всех гладких поверхностей S_t , для которых выполняется равенство (9).

Рассмотрим векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u$$

и соответствующую дифференциальную форму

$$\omega_u = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx \wedge dy \right)$$

Для всех $S_t \in \Sigma_u^*$

$$\iint_{S_t} \omega_u = \iint_{S_t} (\vec{\mathbf{W}}, \vec{n}) ds = \frac{1}{C_p} \iint_{S_t} |\nabla u|^{p-1} ds = 1,$$

где $\vec{n} = \nabla u / |\nabla u|$. Следовательно, поле $\vec{\mathbf{W}}$ допустимо для семейства Σ_u^* .

При этом

$$MV_{p'}(\Sigma_u^*) \leq \iiint_G |\vec{\mathbf{W}}|^{p'} dx dy dz = \frac{1}{C_p^{p'}} \iiint_G |\nabla u|^p dx dy dz = (C_p)^{-p'/p} = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Рассмотрим произвольное допустимое для семейства Σ_u^* векторное поле $\vec{\mathbf{\Lambda}}$, для которого неравенство

$$\iint_{S_t} |\vec{\mathbf{\Lambda}}| ds \geq \left| \iint_{S_t} (\vec{\mathbf{\Lambda}}, \vec{n}) ds \right| \geq 1$$

выполняется при почти всех $t \in (0, 1)$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по множествам уровня функции u [14], получаем оценку

$$\iiint_G |\nabla u| |\vec{\mathbf{\Lambda}}| dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{S_t} |\vec{\mathbf{\Lambda}}| dl \right) dt \geq 1.$$

С другой стороны, согласно неравенству Гёльдера

$$1 \leq \iiint_G |\nabla u| |\vec{\mathbf{\Lambda}}| dx dy dz \leq \left(\iiint_G |\nabla u|^p dx dy dz \right)^{1/p} \left(\iint_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'} dx dy dz \right)^{1/p'} = (C_p)^{1/p} \left(\iiint_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'} dx dy dz \right)^{1/p'}.$$

Следовательно,

$$MV_{p'}(\Sigma_u^*) = \inf_{\vec{\mathbf{\Lambda}} \succ \Sigma_u^*} \iiint_G |\vec{\mathbf{\Lambda}}|^{p'} dx dy dz \geq (C_p)^{-p'/p} = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Аналогичные оценки выполняются и для связанной с векторным полем $\vec{\mathbf{\Lambda}}$ дифференциальной 2-формы $\omega_{\vec{\mathbf{\Lambda}}}$.

Таким образом, $M\Omega_{p'}(\Sigma_u^*) = MV_{p'}(\Sigma_u^*) = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*)$.

Семейство Σ_u^* является полным в том смысле, что его модуль равен модулю всего семейства Σ_K^* .

Пример 2. Рассмотрим на плоскости R^2 ограниченную область D с кусочно гладкой границей γ . В R^3 рассмотрим цилиндрическую область $G = D \times (0, h)$ и конденсатор $K = (K_0, K_1)$, у которого K_0 является нижним основанием цилиндра G , а K_1 верхним основанием. Площадь области D обозначим символом $|D|$.

Если функция v является допустимой для конденсатора K , то на почти всех вертикальных отрезках, соединяющих основания

$$1 \leq \int_0^h |\nabla v| dz \leq h^{1/p'} \left(\int_0^h |\nabla v|^p dz \right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\iiint_G |\nabla v|^p dx dy dz \geq \frac{|D|}{h^{p-1}}.$$

Легко заметить, что в данном случае экстремальная функция является линейной

$$u(x, y, z) = \frac{z}{h} \quad \text{и} \quad \text{cap}_p(K_0, K_1, G) = \frac{|D|}{h^{p-1}}.$$

В данном случае векторное поле

$$\vec{W} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u = \frac{1}{|D|} \vec{k},$$

а соответствующая дифференциальная 2-форма

$$\omega_u = \frac{1}{|D|} dx \wedge dy.$$

Форма ω_u является точной и имеет первообразную

$$\Omega_u = \frac{1}{2|D|} (-y dx + x dy).$$

Семейство поверхностей Σ_u^* состоит из сечений цилиндра G плоскостями ортогональными вектору \vec{k} , определяющему ориентацию сечений. Если поверхность $S_t \in \Sigma_u^*$, то её край γ_t конгруэнтен кривой γ - границе области D . Семейство всех кривых γ_t обозначим символом Γ . Согласно формуле Стокса для всякой кривой $\gamma_t \in \Gamma$

$$\int_{\gamma_t} \Omega_u = \iint_{S_t} d\Omega_u = \iint_{S_t} \omega_u = 1.$$

Гладкую в G и непрерывную в \bar{G} дифференциальную 1-форму Ω будем называть допустимой для семейства Γ , если для всякой кривой $\gamma_t \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\int_{\gamma_t} \Omega \geq 1.$$

Множество всех допустимых для семейства Γ дифференциальных форм обозначим символом $\mathbf{F}(\Gamma)$.

Если дифференциальная форма Ω допустима для семейства Γ , то

$$1 \leq \int_{\gamma_t} \Omega = \iint_{S_t} d\Omega.$$

Следовательно, дифференциальная 2-форма $d\Omega$ является допустимой для семейства Σ_u^* и, как ранее доказано

$$\iiint_G |d\Omega|^{p'} dx dy dz \geq \iiint_G |\omega_u|^{p'} dx dy dz = \frac{h}{|D|^{p'-1}} = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Следовательно,

$$\text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*) = \inf_{\Omega \in \mathbf{F}(\Gamma)} \iiint_G |d\Omega|^{p'} dx dy dz.$$

Таким образом, при нахождении модуля семейства Σ_u^* мы можем вместо допустимых дифференциальных форм второй степени использовать класс допустимых дифференциальных форм первой степени. При этом конструкция становится похожей на определение ёмкости конденсатора, в котором используются допустимые функции - "формы нулевой степени". ■

Рассмотрим односвязную компактную область $\bar{G} \subset R^3$, два непересекающихся континуума $K_0, K_1 \subset \partial G$ и экстремальную для p -ёмкости конденсатора $K = (K_0, K_1)$ функцию u . Сохраним обозначение Σ_u^* для определенного ранее семейства множеств уровня функции u . Пусть

$$0 < C_p = \text{cap}_p(K_0, K_1, G) < \infty.$$

Поскольку экстремальная функция u является p -гармонической, то векторное поле

$$\vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{C_p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u$$

является бездивергентным в слабом смысле, т.е.

$$\iiint_G (|\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi) dx dy dz = 0 \quad (10)$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Предположим далее, что поле $\vec{\mathbf{W}}$ является гладким. В этом случае оно является бездивергентным в классическом смысле

$$\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

При этом дифференциальная форма

$$\omega_u = |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx \wedge dy \right)$$

будет замкнутой, поскольку

$$d\omega_u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

По теореме Пуанкаре замкнутая в односвязной области форма ω_u является точной и у неё существует первообразная, т.е. существует такая гладкая 1-форма Ω_u , что $d\Omega_u = \omega_u$.

Рассмотрим поверхность $S_t \in \Sigma_u^*$ и обозначим её край символом γ_t . Кривая $\gamma_t \subset \partial G$, является замкнутой и разделяет континуумы K_0 и K_1 как подмножества ∂G . Семейство всех таких кривых γ_t обозначим символом Γ .

Если все кривые $\gamma_t \in \Gamma$ является кусочно гладкими, а форма Ω_u допускает непрерывное продолжение на множество $\partial G \setminus (K_0 \cup K_1)$, то согласно теореме Стокса

$$\int_{\gamma_t} \Omega_u = \iint_{S_t} d\Omega_u = \iint_{S_t} \omega_u = \iint_{S_t} (\vec{W}, \vec{n}) ds = 1.$$

Таким образом, 2-форма $d\Omega_u$ является допустимой для семейства поверхностей Σ_u^* и

$$\iiint_G |d\Omega_u|^{p'} dx dy dz = \iiint_G |\omega_u|^{p'} dx dy dz = M\Omega_{p'}(\Sigma_u^*) = \text{mod}_{p'}(\Sigma_u^*).$$

Как и в примере 2, гладкую в G и непрерывную в $\bar{G} \setminus (K_0 \cup K_1)$ дифференциальную 1-форму Ω будем называть допустимой для семейства Γ и использовать обозначение $\Omega \succ \Gamma$, если для всякой кривой $\gamma_t \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\int_{\gamma_t} \Omega \geq 1. \quad (11)$$

Множество всех допустимых для семейства Γ дифференциальных форм обозначим символом $\mathbf{F}(\Gamma)$ и определим "ёмкость" семейства поверхностей Σ_u^* равенством

$$CAP_{p'}(\Sigma_u^*) = \inf_{\Omega \succ \mathbf{F}(\Gamma)} \iiint_G |d\Omega|^{p'} dx dy dz.$$

Если дифференциальная 1-форма Ω допустима для семейства Γ , то

$$1 \leq \int_{\gamma_t} \Omega = \iint_{S_t} d\Omega.$$

Следовательно, дифференциальная 2-форма $d\Omega$ является допустимой для семейства Σ_u^* и, как ранее доказано,

$$\iiint_G |d\Omega|^{p'} dx dy dz \geq \iiint_G |\omega_u|^{p'} dx dy dz = \text{mod}_{p'}(\Sigma_u^*).$$

Таким образом,

$$CAP_{p'}(\Sigma_u^*) = M\Omega_{p'}(\Sigma_u^*) = \text{mod}_{p'}(\Sigma_u^*) = \text{mod}_{p'}(\Sigma_K^*).$$

Замечание 1. Приведенное в работе определение ёмкости семейства поверхностей $CAP_{p'}(\Sigma_u^*)$ вполне аналогично стандартному определению ёмкости конденсатора с учетом единственной замены допустимой функции (0-формы) на допустимую 1-форму. При этом приращение функции $u(b) - u(a) = 1 (a \in K_0, b \in K_1)$ можно интерпретировать как интеграл по краю кривой, состоящему из двух *противоположно ориентированных* точек.

Замечание 2. Достаточно очевидно, что можно определить понятие ёмкости и для произвольного семейства кусочно гладких поверхностей. При этом можно отказаться от требования кусочной гладкости края поверхности S , заменяя условие (11) неравенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_n} \Omega \geq 1,$$

где $\{l_n\}$ - последовательность лежащих на поверхности S вложенных кусочно гладких замкнутых контуров, стягивающихся к краю поверхности.

Замечание 3. По содержанию данная работа является расширенной постановкой задачи, содержащей модельные примеры и позволяющей по-новому взглянуть на некоторые, на наш взгляд, интересные факты теории p -модулей семейств поверхностей. Для более обстоятельного изучения вопроса в R^3 и возможности отказаться от априорных предположений требуется получение предварительных результатов, связанных с регулярностью экстремальных функций. По аналогии с работой В. Fuglede [4], в которой рассматриваются безвихревые поля, видимо, можно доказать, что бездивергентное в слабом смысле поле \vec{W} (равенство 10) имеет векторный потенциал, принадлежащий пространству Соболева.

В пространствах R^n при $n > 3$ возникают дополнительные вопросы, связанные с существованием k -мерных поверхностей промежуточной размерности.

References

- [1] W.P. Ziemer, *Extremal length and p -capacity*, Michigan Math. J., **16**:1 (1969), 43-51.
- [2] J. Hesse, *A p -extremal length and p -capacity equality*, Ark. Mat., **13**:1-2 (1975), 131-144.
- [3] P. Caraman, *New cases of equality between p -module and p -capacity*, Annales Polonici Mathematici, **55**:1 (1991), 37-56.
- [4] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta math., **98**:3-4, (1957), 171-219.
- [5] N.N. Ural'tseva, *Degenerate quasilinear elliptic systems*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **7** (1968), 184-222.
- [6] J. Lewis, *Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations*, Indiana University Math. J., **32**:6, (1983), 849-858.

- [7] V.M. Gold'shtein, Yu.G. Reshetnyak, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1990.
- [8] A.S. Romanov *Properties of extremal functions for p -capacity in R^2* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2, (2021), 845-866.
- [9] V.A. Shlyk, *The capacity of a condenser and the modulus of a family of separating surfaces*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **185** (1990), 168-182 (in Russian).
- [10] T. Iwaniec, J.J. Manfredi, *Regularity p -harmonic functions on the plane*, Rev. Mat. Iberoamericana, **5**:1-2, (1989), 1-19.
- [11] J.J. Manfredi, *p -harmonic functions in the plane*, Proceedings of the AMS, **103**:2 (1988), 473-479.
- [12] A.S. Romanov *Capacity relations in a flat quadrilateral*, Siberian Math. J., **49**:4 (2008), 709-717.
- [13] A.S. Romanov *Mappings related to extremal functions for p -capacity*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16**, (2019), 1295-1311.
- [14] V.G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, 1985.
- [15] A.S. Romanov *Extremality of p -harmonic functions in R^2* , Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1015-1022.

ALEXANDR SERGEEVICH ROMANOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: asrom@math.nsc.ru