Р Е Ц Е Н З И Я
на статью А.С. Романова
«Модули семейств поверхностей, векторные поля, ёмкость, дифференциальные формы»

Около ста лет назад, когда начали изучать свойства решений уравнения Бельтрами, возникло несколько методов исследования свойств решений. Ожидалось, что гомеоморфные решения этих уравнений суть квазиконформными отображениями, однако, в то время еще не были разработаны гибкие аналитические средства для их исследования. Поэтому возникли другие методы: один из них получил название «метод экстремальных длин» или «метод модулей». Аналитический метод появился несколько позже: в его основе лежит понятие емкости. До настоящего времени применение этих двух методов в разных математических школах зависит от предпочтений или традиций конкретной исследовательской группы.

К чему это приводит, можно показать на примере работы

Hesse J. A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Mat. 1975. V. 13, № 1–2. P. 131–144,

в которой доказано, что p-экстремальная длина семейства кривых, соединяющих два континуума, равна p-емкости этих континуумов.

Любому здравомыслящему человеку понятно, что если в работе установлены свойства какого-либо математического объекта с использованием теории емкости, то в силу результата Hesse J. эти же свойства можно получить и с использованием свойства модуля семейств кривых, и наоборот. В действительности происходит тиражирование статей: если в одной исследовательской группе получены новые результаты с помощью емкости, то другая группа (возможно в другой стране) будет получать те же самые результаты с помощью метода модулей.

Конечно, есть узкий класс задач, где применение метода модулей имеет некоторое преимущество. Об этих задачах сейчас говорить не будем

В связи с вышесказанным считаю предпринимаемую автором рецензируемой работы инициативу весьма своевременной и актуальной: автор сравнивает не только возможности применения метода экстремальных длин и емкости, но вводит в рассмотрение два новых понятия, значения которых в ряде случаев совпадают со значениями модуля емкости, но очевидно имеют более гибкие возможности для применения в многомерном анализе дифференцируемых многообразий, особенно для задач, в которых требуется информация о свойствах геометрических объектов промежуточной размерности. Все эти возможности наглядно показаны в § 3 работы.

Работа написана в форме, максимально доступной для широкой аудитории потенциальных читателей от студентов/аспирантов до профессионалов. Работа хорошо отредактирована, а перечисляемые ниже опечатки и недочеты легко исправимы и не затрудняют понимание математического содержания работы.

1) На 2-ой странице написано: *Известно, что всякая p-гармоническая функция является гладкой и принадлежит классу* $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(G)$, $\alpha > 0$ [3].

Работа [3] опубликована в 1983 году. В 1973 году опубликована книга О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой «Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа», в теореме 7.1 которой этот результат о гладкости сформулирован и доказан при $p > 2$ (кажется, этот результат установлен Н.Н. Уральцевой еще в 1968 году). Все последующие результаты были обобщениями: кроме результата Lewis J., который доказал гладкость при $1 < p < 2$, была еще работа Manfredi H. на эту тему, который получил новое доказательство.

2) Страница 5, 10 строка снизу, в слове «континуум» опечатка.

3) Страница 6, 14-15 строки сверху: я бы поставил союз "и" между строками.

4) На Странице 10 после слов «следовательно», «таким образом» просится зпт. Это замечание можно отнести и к другим страницам.

На сновании вышесказанного я считаю, что кроме сформулированных результатов статья А.С. Романова «Модули семейств поверхностей, векторные поля, ёмкость, дифференциальные формы» представляет собой программу исследований, и я рекомендую эту работу для опубликования в журнале «Сибирские электронные математические известия».

Рецензент

24 декабря 2023 года