

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

Том 11, стр. 144–144 (2014)

УДК 510.652

MSC 11U99

## О СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАД ГРАФАМИ

А.Н. РЫБАЛОВ

ABSTRACT. In this paper the computational complexity of the problem of determining the compatibility of systems of equations without constants over an arbitrary fixed finite graph is studied. In this case, the graph is fixed, and the input is an arbitrary system of equations in the graph language without constants. A criterion is given for NP-completeness and polynomial decidability of this problem. Also its generic decidability in polynomial time is proved.

**Keywords:** NP-completeness, generic complexity, graphs, equations.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Решение уравнений и систем уравнений над вещественными, комплексными, рациональными, целыми числами является классической темой исследований в различных областях математики в течение уже нескольких тысяч лет. Классическая алгебраическая геометрия изучает множества решений алгебраических уравнений над полями вещественных и комплексных чисел. В рамках диофантовой геометрии и диофантова анализа изучаются решения алгебраических уравнений над целыми и рациональными числами. В XX веке большую роль начали играть вычислительные аспекты этих теорий. Изучение алгоритмических проблем, связанных с определением наличия решения у систем уравнений, а также с нахождением и описанием множества решений, является темой многочисленных теоретических и практических исследований.

Другим направлением исследований, возникшим в XX веке, является изучение и решение систем уравнений над алгебраическими системами, отличными от классических полей вещественных и комплексных чисел и кольца целых

---

RYBALOV, A.N., ON COMPLEXITY OF SOLVING OF EQUATIONS OVER GRAPHS.

© 2023 Рыбалов А.Н..

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Поступила 30 июня 2023 г., опубликована 1 сентября 2023 г.

чисел. К ярким результатам такого типа можно отнести алгоритм Г. С. Маканина [8], решающий проблему разрешимости систем уравнений в свободных полугруппах, а также результат В. А. Романькова [9] о неразрешимости проблемы решения систем уравнений над некоторыми нильпотентными группами. Дальнейшее изучение уравнений над группами и перенос идей классической алгебраической геометрии на произвольные алгебраические системы привел к появлению в работах Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова универсальной алгебраической геометрии [1].

Важнейшими объектами изучения в дискретной математике и информатике являются графы. Уравнения над графами в духе универсальной алгебраической геометрии изучались в работах А. В. Ильева, В. П. Ильева и В. Н. Ремесленникова [3, 4, 5, 6]. В частности, в [5] было доказано, что проблема определения разрешимости (совместности) систем уравнений над конечными графами является NP-полной. При этом и система и граф варьируются и являются частью входа. В [6] была доказана NP-полнота проблемы совместности систем уравнений без констант над фиксированным конечным полным  $p$ -дольным графом при  $p \geq 3$  и ее полиномиальная разрешимость при  $p < 3$ .

В данной работе исследуется проблема определения совместности систем уравнений без констант над произвольным фиксированным конечным графом. При этом граф фиксирован, а входом является произвольная система уравнений в языке графов без констант. Дается критерий NP-полноты и полиномиальной разрешимости этой проблемы. Также доказывается ее генерическая разрешимость за полиномиальное время.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

На протяжении всей статьи будем рассматривать неориентированные графы без петель и кратных ребер. Такие графы называются *простыми*. Граф  $G$  – это пара  $(V, E)$ , где  $V$  – множество вершин, а  $E \subseteq V \times V$  – множество ребер графа  $G$ . Для любого множества  $A$  через  $|A|$  будем обозначать его мощность.

Каждому конечному графу  $G = (V, E)$  сопоставим конечную алгебраическую систему  $\mathfrak{A}_G = \langle V, L_G \rangle$ , носитель которой есть множество вершин  $V$ , а язык  $L_G = \{E^{(2)}, =\}$  состоит из бинарного предиката смежности вершин  $E(x, y)$  и предиката равенства. Предикат смежности в алгебраической системе  $\mathfrak{A}_G$  интерпретируется следующим образом: для любых вершин  $v_1, v_2 \in V$  имеет место  $E(v_1, v_2) \Leftrightarrow (v_1, v_2) \in E$ . Причем предикат смежности удовлетворяет следующим аксиомам:

- (1)  $\forall x \neg E(x, x)$ ,
- (2)  $\forall x, y E(x, y) \rightarrow E(y, x)$ .

*Уравнением* языка графов  $L_G$  называется либо предикат  $E(x_i, x_j)$ , либо равенство  $x_i = x_j$ . Иногда в язык добавляют также все элементы носителя в качестве констант, такой язык называется *диофантовым*. В этом случае появляются уравнения вида  $E(x_i, v_j)$ ,  $E(v_i, v_j)$ ,  $x_i = v_j$  и  $v_i = v_j$ . Однако в данной статье мы будем рассматривать уравнения над графами в языке без констант, учитывая то, что аналогичные результаты можно получить и в диофантовом случае. *Система уравнений* языка графов  $L_G$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$  есть конечный набор уравнений от этих переменных. Система уравнений  $S$  *совместна над графом*  $G$ , если существуют значения переменных системы  $S$  из носителя алгебраической системы  $\mathfrak{A}_G$ , при которых каждое уравнение истинно

над  $\mathfrak{A}_G$ . Очевидно, что любую систему  $S$  над любым графом  $G$  можно легко преобразовать в эквивалентную ей систему  $S'$  над  $G$  (в том смысле, что обе системы одновременно либо совместны, либо не совместны над  $G$ ), избавившись от уравнений вида  $x_i = x_j$  и от одинаковых (с точностью до перестановки переменных  $x_i$  и  $x_j$ ) уравнений вида  $E(x_i, x_j)$ . Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что системы состоят только из различных (с точностью до перестановки переменных  $x_i$  и  $x_j$ ) уравнений вида  $E(x_i, x_j)$ . *Проблема проверки совместности систем уравнений над графом  $G$*  состоит в следующем. Входом проблемы является произвольная система уравнений  $S$  в языке графов. Нужно определить, является ли система  $S$  совместной над графом  $G$ .

Пусть имеются два графа  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  называется *гомоморфизмом* графа  $G_1$  на граф  $G_2$ , если для любых  $v_1, v_2 \in V_1$  из того, что  $(v_1, v_2) \in E_1$  следует, что  $(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) \in E_2$ . Это определение соответствует определению гомоморфизма алгебраической системы  $\mathfrak{A}_{G_1}$  на алгебраическую систему  $\mathfrak{A}_{G_2}$ . Легко видеть, что если  $\varphi$  – гомоморфизм графа  $G_1$  на граф  $G_2$ , а  $\psi$  – гомоморфизм графа  $G_2$  на граф  $G_3$ , то суперпозиция  $\varphi \circ \psi$  – гомоморфизм графа  $G_1$  на граф  $G_3$ .

Напомним также, что *раскраской* графа  $G$  в  $t$  цветов называется присваивание каждой вершине графа одного из  $t$  цветов так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром были раскрашены в разные цвета. Если такая раскраска существует, граф называется *раскрашиваемым* в  $t$  цветов. *Хроматическим числом* графа называется минимальное  $t$  такое, что граф раскрашиваем в  $t$  цветов.

### 3. КРИТЕРИЙ NP-ПОЛНОТЫ

Пусть  $S$  – система уравнений от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Сопоставим системе  $S$  граф  $G(S)$  следующим образом. Вершины графа  $G(S)$  – это переменные  $x_1, \dots, x_n$ . Вершины  $x_i$  и  $x_j$  соединены ребром тогда и только тогда, когда в системе  $S$  имеется уравнение  $E(x_i, x_j)$ .

**Лемма 1.** *Система  $S$  совместна над графом  $G$  тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм графа  $G(S)$  на граф  $G$ .*

*Доказательство.* Обозначим множество переменных системы  $S$  как  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , а множество вершин графа  $G$  как  $\{v_1, \dots, v_m\}$ .

Пусть система  $S$  совместна над графом  $G$ . Тогда существуют значения переменных  $x_1, \dots, x_n$  из множества  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , для которых все уравнения системы  $S$  истинны над  $G$ . Положим  $\varphi(x_i) = v_j$ , где  $v_j$  – соответствующее значение переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Легко проверить, что  $\varphi$  – гомоморфизм графа  $G(S)$  на граф  $G$ .

Обратно, пусть существует гомоморфизм  $\varphi$  графа  $G(S)$  на граф  $G$ . Тогда  $\varphi(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  есть решение системы  $S$  над графом  $G$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Граф  $G$  раскрашиваем в  $t$  цветов тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм  $G$  на полный граф на  $t$  вершинах  $K_m$ .*

*Доказательство.* Обозначим вершины графа  $G$  через  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , а графа  $K_m$  через  $M = \{1, \dots, t\}$ .

Пусть граф  $G$  раскрашиваем в  $t$  цветов. Определим отображение  $\chi : V \rightarrow M$  следующим образом:  $\chi(v_i) = j$ , где  $j$  – номер цвета, в который раскрашена

вершина  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Проверим, что  $\chi$  является гомоморфизмом графа  $G$  на граф  $K_m$ . Пусть вершины  $v_i$  и  $v_j$  графа  $G$  соединены ребром. Так как раскраска правильная, то цвета вершин  $v_i$  и  $v_j$  разные, поэтому  $\chi(v_i) \neq \chi(v_j)$  и вершины  $\chi(v_i)$  и  $\chi(v_j)$  соединены ребром в графе  $K_m$ , так как он полный.

Обратно, пусть имеется гомоморфизм графа  $G$  на граф  $K_m$ . Рассмотрим раскраску графа  $G$ , задаваемую для вершины  $v_i$  значением гомоморфизма  $\chi(v_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда для любых вершин  $v_i$  и  $v_j$ , соединенных ребром в графе  $G$  имеет место  $\chi(v_i) \neq \chi(v_j)$ , так как в  $K_m$  нет петель. Получается правильная раскраска графа  $G$  в  $m$  цветов.  $\square$

**Теорема 1.** *Пусть  $G$  – фиксированный конечный граф с хроматическим числом  $m$ . Тогда если  $m \leq 2$ , то проблема проверки совместности систем уравнений над  $G$  разрешима за полиномиальное время, иначе эта проблема NP-полна.*

*Доказательство.* Так как  $m$  – хроматическое число графа  $G$ , то, по лемме 2, существует гомоморфизм  $\chi$  графа  $G$  на полный граф  $K_m$ .

Покажем, что проблема проверки совместности систем уравнений  $S$  над  $G$  эквивалентна проблеме проверки того, что граф  $G(S)$  раскрашиваем в  $m$  цветов.

Действительно, пусть система  $G(S)$  имеет решение над графом  $G$ . Тогда, по лемме 1, существует гомоморфизм  $\varphi$  графа  $G(S)$  на граф  $G$ . Таким образом суперпозиция  $\varphi \circ \chi$  будет гомоморфизмом графа  $G(S)$  на полный граф  $K_m$ . Поэтому, по лемме 2, граф  $G(S)$  можно раскрасить в  $m$  цветов.

Обратно, пусть граф  $G(S)$  можно раскрасить в  $m$  цветов. По лемме 2, существует гомоморфизм  $\varphi$  графа  $G(S)$  на полный граф  $K_m$ . Построим гомоморфизм  $\psi$  графа  $K_m$  на граф  $G$  следующим образом.

Заметим, что для каждой вершины  $v$  графа  $K_m$  найдется вершина  $u$  графа  $G$  такая, что  $\chi(u) = v$ . То есть  $u$  есть прообраз вершины  $v$  при гомоморфизме  $\chi$ . Если бы это было не так, то вершину  $v$ , у которой нет прообраза можно было отбросить вместе со всеми ребрами, инцидентными  $v$ , и получить гомоморфизм графа  $G$  на полный граф  $K_{m-1}$ . Значит, по лемме 2, граф  $G$  можно раскрасить в  $m - 1$  цвет, что противоречит тому, что  $m$  – хроматическое число графа  $G$ .

Теперь покажем, что для любых двух вершин  $v_1$  и  $v_2$  графа  $K_m$ , которые, конечно же соединены ребром в  $K_m$ , найдутся вершины  $u_1$  и  $u_2$  графа  $G$ , прообразы  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно, соединенные ребром в  $G$ . Допустим, что это не так, тогда сделаем следующее. Склеим вершины  $v_1$  и  $v_2$  в графе  $K_m$  в одну вершину, при этом удалим все ребра, их соединяющие, а ребра, соединяющие эти две вершины с другими будут соединять новую вершину  $\{v_1, v_2\}$  со всеми остальными. Получится граф  $K_{m-1}$ . А гомоморфизм  $\chi$  подправим так, чтобы все прообразы вершин  $v_1$  и  $v_2$  переходили в новую вершину  $\{v_1, v_2\}$ . Легко видеть, что при этом получается гомоморфизм графа  $G$  на граф  $K_{m-1}$ . Но это, по лемме 2, опять противоречит тому, что  $m$  – хроматическое число графа  $G$ .

Теперь получается, что для любых двух вершин  $v_1$  и  $v_2$  графа  $K_m$  найдутся две вершины  $u_1$  и  $u_2$  графа  $G$  соединенные ребром, такие, что  $\chi(u_1) = v_1$  и  $\chi(u_2) = v_2$ . Положим  $\psi(v_1) = u_1$ . Легко видеть, что отображение  $\psi$  является гомоморфизмом графа  $K_m$  на граф  $G$ . Теперь гомоморфизм  $\varphi \circ \psi$  графа  $G(S)$  на граф  $G$ , по лемме 1, доказывает совместность системы  $S$  над графом  $G$ .

Проблема проверки раскраски графа в  $t$  цветов является разрешимой за полиномиальное время при  $t \leq 2$  и NP-полной при  $t > 2$  [2]. Отсюда следует утверждение теоремы.  $\square$

Из доказательства этой теоремы следует такое утверждение.

**Лемма 3.** Пусть граф  $G$  имеет  $t$  вершин. Тогда если для системы  $S$  ее граф  $G(S)$  нельзя раскрасить в  $t$  цветов, то система  $S$  несовместна над  $G$ .

#### 4. ГЕНЕРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Под размером системы уравнений  $S$  в языке графов будем понимать число переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Так как системе  $S$  размера  $n$  соответствует граф  $G(S)$  на  $n$  вершинах, а простые графы можно представлять матрицей смежности (причем достаточно только верхней ее половины), будем считать, что система задается матрицей смежности (верхней ее половиной). Для краткости будем называть верхние половины матриц смежности *полуматрицами*. Обозначим через  $\mathcal{S}$  множество всех систем, а через  $\mathcal{S}_n$  множество систем размера  $n$ .

**Лемма 4.**  $|\mathcal{S}_n| = 2^{n(n-1)/2}$ .

*Доказательство.* Простой подсчет.  $\square$

Напомним основные определения генерического подхода [7]. Для любого подмножества  $A \subseteq \mathcal{S}$  определим следующую последовательность

$$\rho_n(A) = \frac{|A_n|}{|\mathcal{S}_n|}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $A_n = A \cap \mathcal{S}_n$  – множество систем из  $A$  размера  $n$ . *Асимптотической плотностью*  $A$  назовём предел (если он существует)

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(A).$$

Множество  $A$  называется *генерическим*, если  $\rho(A) = 1$ , и *пренебрежимым*, если  $\rho(A) = 0$ . Очевидно, что  $A$  генерическое тогда и только тогда, когда  $\mathcal{S} \setminus A$  пренебрежимо.

Алгоритм  $\mathcal{A}$  с множеством входов  $\mathcal{S}$  и множеством выходов  $\mathbb{N} \cup \{?\}$  называется *генерическим*, если

- (1)  $\mathcal{A}$  останавливается на всех входах из  $\mathcal{S}$ ;
- (2) множество  $\{x \in \mathcal{S} : \mathcal{A}(x) = ?\}$  является пренебрежимым.

Генерический алгоритм  $\mathcal{A}$  вычисляет функцию  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ , если для всех  $x \in \mathcal{S}$  выполнено

$$(\mathcal{A}(x) \neq ?) \Rightarrow (f(x) = \mathcal{A}(x)).$$

Проблема распознавания множества  $A \subseteq \mathcal{S}$  *генерически разрешима за полиномиальное время*, если существует полиномиальный генерический алгоритм, вычисляющий характеристическую функцию множества  $A$ . Напомним, что *характеристической функцией* множества  $A \subseteq \mathcal{S}$  называется функция  $\chi_A : \mathcal{S} \rightarrow \{0, 1\}$ , определенная следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

**Лемма 5.** Пусть  $m$  — фиксированное натуральное число. Тогда множество систем  $S$  таких, что граф  $G(S)$  содержит клику  $K_m$ , является генерическим.

*Доказательство.* Будем доказывать, что множество  $A$  систем, графы которых не содержат клику  $K_m$ , является пренебрежимым. Определим множество систем  $B$ , графы которых имеют следующий вид. В каждом графе системы из этого множества на вершинах  $\{x_1, \dots, x_n\}$  запрещена клика на вершинах  $\{x_1, \dots, x_m\}$ , клика на вершинах  $\{x_{m+1}, \dots, x_{2m}\}$ , ..., клика на вершинах  $\{x_{m([n/m]-1)+1}, \dots, x_{m[n/m]}\}$ . Очевидно  $A \subseteq B$ .

Можно подсчитать, что

$$|B_n| = 2^{n(n-1)/2 - [n/m]m(m-1)/2} (2^{m(m-1)/2} - 1)^{[n/m]}.$$

Это следует из того, что в полуматрицах смежности графов систем из множества  $B$  над диагональю “запрещены”  $[n/m]$  подполуматриц размера  $m$ , состоящих из единиц.

Теперь

$$\begin{aligned} \rho(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n|}{|\mathcal{S}_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n(n-1)/2 - [n/m]m(m-1)/2} (2^{m(m-1)/2} - 1)^{[n/m]}}{2^{n(n-1)/2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{m(m-1)/2} - 1)^{[n/m]}}{2^{[n/m]m(m-1)/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{m(m-1)/2}}\right)^{[n/m]} = 0. \end{aligned}$$

Это доказывает, что множество  $B$  является пренебрежимым, а, значит, и его подмножество  $A$  тоже пренебрежимо.  $\square$

**Теорема 2.** Для любого фиксированного графа  $G$  проблема проверки совместности систем уравнений над  $G$  генерически разрешима за полиномиальное время.

*Доказательство.* Пусть граф  $G$  имеет  $m$  вершин. Полиномиальный генерический алгоритм, решающий проблему проверки совместности систем уравнений над  $G$  будет работать на системе  $S$  размера  $n$  следующим образом.

- (1) Ищет в графе  $G(S)$  клику размера  $m + 1$ . Это делается перебором всевозможных подмножеств вершин  $G(S)$  размера  $m + 1$  и проверки того, что все они друг с другом соединены ребрами. Число таких подмножеств  $C_n^{(m+1)}$  полиномиально, так как число  $m$  фиксировано.
- (2) Если клика нашлась, то выдает ответ «НЕТ».
- (3) Если клики нет, выдает ответ «НЕ ЗНАЮ».

Корректность алгоритма следует из леммы 3, так как если в графе  $G(S)$  есть клика размера  $m + 1$ , то его нельзя раскрасить в  $m$  цветов. Генеричность алгоритма следует из леммы 5.  $\square$

## REFERENCES

- [1] E. Y. Daniyarova, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov. *Algebraic geometry over algebraic structures*, Novosibirsk: SB RAS, (2016) 288 p (in Russian).  
<https://ofim.oscsbras.ru/remesl/articles/monography.pdf>
- [2] M. Garey, D. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, (1979). 340p.  
<https://bohr.wlu.ca/hfan/cp412/references/ChapterOne.pdf>

- [3] A. V. Ilev. *Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **22(1)** (2016), 100–111.  
<http://mi.mathnet.ru/rus/timm1264>
- [4] A. V. Ilev, V. N. Remeslennikov. *Study of the compatibility of systems of equations over graphs and finding their general solutions*, Vestnik Omskogo Universiteta, **4(86)** (2017), 26–32.  
<https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-sovmestnosti-sistem-uravneniyad-grafami-i-nahozhdenie-ih-obschih-resheniy.pdf>
- [5] A. V. Il'ev, V. P. Il'ev, *Algorithms for solving systems of equations over various classes of finite graphs*, Prikl. Diskretn. Mat., **53** (2021), 89–102.  
<https://journals.tsu.ru/engine/download.php?id=223284&area=files>
- [6] A. V. Ilev. *Study of systems of equations over various classes of finite matroids*, Siberian electronic mathematical reports, **19(2)** (2022), 1094–1102.  
<http://semr.math.nsc.ru/v19/n2/p1094-1102.pdf>
- [7] I. Kapovich, A. Myasnikov, P. Schupp, V. Shpilrain. *Generic-case complexity and decision problems in group theory*, Journal of Algebra, **264** (2003), 665–694.  
<https://arxiv.org/pdf/math/0203239>
- [8] G. S. Makanin. *The problem of solvability of equations in a free semigroup*, Math. USSR-Sb., **32(2)** (1977), 129–198.  
<https://www.mathnet.ru/links/fa3dc999248a3668e801cfb80f1c229c/sm2805.pdf>
- [9] V. A. Roman'kov *Universal theory of nilpotent groups*, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, **25** (1979), 253–258.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01688474>

ALEXANDER NIKOLAEVICH RYBALOV  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
ПРОСПЕКТ КОПТЮГА 4,  
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA.  
PEVTSOVA 13,  
OMSK, 644099, RUSSIA.  
Email address: alexander.rybalov@gmail.com