Р Е Ц Е Н З И Я
на статью Д.В. Исангуловой
«COERCIVE ESTIMATE FOR NON-HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL OPERATOR ON HEISENBERG GROUP»

Рецензируемая рукопись входит в цикл работ Д.В. Исангуловой, посвященный известной задаче об оценках устойчивости конформных отображений на группах Карно. Отмечу, что проблема устойчивости в теореме Лиувилля была сформулирована М.А. Лаврентьевым. Суть проблемы состоит в том, чтобы по локальным отклонениям характеристики квазиконформного отображения от единицы оценить глобальное отклонение данного отображения от мёбиусова (в качестве характеристики отклонения можно взять отношение наибольшей оси касательного эллипсоида к наименьшей). Полное решение этой проблемы в евклидовых пространствах приведено в цикле работ Ю.Г. Решетняка 70-ых годы прошлого века.

Около 30 лет назад естественным образом возникли квазиконформные отображения на группах Ли специального вида (группах Карно). Группы Карно возникли практически одновременно в нескольких областях анализа и геометрии: теории субэллипических уравнений (Хёрмандер, Стейн, Громов), проблемах жесткости гиперболических пространственных форм (Мостов, Пансу), геометрической теории управления (Понтрягин, Гамкрелидзе, Аграчёв, Монтгомери).

Вышесказанное мативировало создание новых разделов на группах Карно: теории пространств Соболева, геометрической теории меры, теории отображений с ограниченным искажением. Работы Д.В. Исангуловой относятся как раз к последней области. Она показала как устроен аналог мёбиусовых отображений на группах Карно, доказала ряд теорем устойчивости на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ при $n > 1$. Случай $\mathbb{H}^1$ до недавнего времени не был исследован. Причина состоит в том, что методы исследования на группе $\mathbb{H}^n$ при $n > 1$ «не работают» на группе $\mathbb{H}^1$. Цель рецензируемой работы состоит в том, чтобы восполнить этот пробел.

Основной объект изучения работы — это оператор $\mathcal{Q}$ (см. с. 3 рукописи) на $\mathbb{H}^1$, состоящий из двух частей $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$, каждая из которых является линеаризацией некоторого нелинейного уравнения.

Основные свойства оператора $\mathcal{Q}$ получены в теоремах 1.1–1.3. Так, в теореме 1.1 доказано, что ядро оператора $\mathcal{Q}$ совпадает с горизонтальным координатными функциями алгебры Ли группы конформных отображений на $\mathcal{H}^1$. В частности, размерность $\ker\mathcal{Q}$ конечная.

Следующее утверждение формулируется несколько сложнее.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varkappa = 2\sqrt{6}+\frac{3}{2}$. *Существует проектор*

$$\Pi : L_1(\mathrm{Box}(0,1);\mathbb{R}^2) \to \ker\mathcal{Q}$$

такой, что для каждой функции $w \in C^\infty\big(\mathrm{Box}(0,\varkappa);\mathbb{R}^2\big)$ *справедлива интегральная формула*

$$w(\mathbf{x}) = \Pi w(\mathbf{x}) + \int\limits_{\mathrm{Box}(\mathbf{0},\varkappa)} K(\mathbf{y},\mathbf{x})\mathcal{Q}w(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}\in\mathrm{Box}(0,1),$$

где

$$K(\mathbf{y},\mathbf{x})\mathcal{Q}w(\mathbf{y}) = L(\mathbf{y},\mathbf{x})\mathcal{Q}w(\mathbf{y}) + M(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x})\mathcal{S}w(\mathbf{y}) + N(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x})\mathcal{T}w(\mathbf{y})$$

с $L(\mathbf{y},\mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{H}\times\mathbb{H})$, $\operatorname{supp} L(\cdot,\mathbf{x}) \subseteq \overline{\mathrm{Box}(\mathbf{0},\varkappa)}$ *для* $\mathbf{x}\in\mathrm{Box}(\mathbf{0},1)$; $M,N\in C^\infty(\mathbb{H}\backslash\{0\})$, $\operatorname{supp} M, \operatorname{supp} N \subseteq \overline{\mathrm{Box}(0,1)}$, *и*

$$\big|X^J M(\mathrm{x})\big| \leqslant Cd(\mathrm{x},0)^{-k-3}, \quad \big|X^J N(\mathrm{x})\big| \leqslant Cd(\mathrm{x},0)^{-k-2}$$

для любого мультииндекса $J=(i_1,\dots,i_k)\in\{1,2\}^k$. Здесь $X^J = X_{i_1}\dots X_{i_k}$.

Полученная формула и оценки на ядро $K(\mathbf{y},\mathbf{x})$ позволяют установить коэрцитивные оценки на ядро $\mathcal{Q}$ (см. **Теорему 1.3.**).

Доказательства упомянутых теорем приведены в §§ 3–5 работы. Очевидно, что специфика изучаемого объекта обуславливает непростые доказательства, при этом каждый шаг сопровождается безупречными вычислениями. Такое отношение к тексту приводит к тому, что у потенциального читателя не должны возникнуть трудности для понимания работы.

Понятно, что полученные результаты будут далее применяться для доказательства оценок устойчивости в теореме Лиувилля на группе $\mathcal{H}^1$.

Автор тщательно продумал структуру работы, что делает ее максимально доступной для широкой аудитории потенциальных читателей от студентов/аспирантов до профессионалов. Работа хорошо отредактирована, а немногочисленные опечатки легко исправимы и не затрудняют понимание математического содержания работы, например,

1) желательно ввести обозначение $\mathrm{Box}(0,r)$ не после теоремы 1.2, а до формулировки теоремы 1.2;

2) в конце 3 строчки п. 2.1 поменять точку на запятую.

Некоторые замечания относятся к английскому языку:

3) на 1 строке страницы 6 заменить "holds"на "hold".

4) в аннотации вместо "We received integral representation formula and proved a coercive estimate for this operator"лучше написать "We obtain an integral representation formula and prove a coercive estimate for this operator."

На основании вышесказанного я рекомендую статью Д. В. Исангуловой «Coercive estimate for non-homogeneous differential operator on Heisenberg group» для опубликования в журнале «Сибирские электронные математические известия».

Рецензент

14 декабря 2023 года