S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.714
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03D15

О СТРОЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СОВЕРШЕННЫХ Π-РАЗБИЕНИЙ

К.Л. Рычков

Представлено П.П. Петровым

Abstract: The concept of Π-partition is an analogue of the concept of normalized formula (a formula in the basis $\{\vee, \wedge, ^-\}$ in which negations are possible only over variables) and concept of Π-schema, just as these last two concepts are analogues of each other. At its core, a Π-partition is a kind of "imprint"of a formula in the Boolean function calculated by this formula and is considered as a representation of this formula. In order to describe the class of minimal normalized formulas that calculate linear Boolean functions, the structure of the Π-partitions representing these formulas has been clarified.

Keywords: boolean functions, π-schemes, normalized formulas, lower bounds on the complexity, formula representation.

1 Введение

Задача описания класса всех минимальных схем, реализующих данную булеву функцию является естественным обобщением задачи получения нижних оценок сложности таких схем. Последняя известна как одна из очень трудных задач дискретной математики. В данной статье

Rychkov, K.L., On the structure of one class of perfect Π-partitions.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект №FWNF-2022-0018).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

в качестве минимальных схем рассматриваются минимальные (т. е. имеющие наименьшее возможное число вхождений переменных) нормализованные формулы, реализующие линейные булевы функции. В случае, когда число k существенных переменных линейной булевой функции находится в интервале от 1 до 8 или равно целой степени двойки, известные к настоящему моменту точные нижние оценки сложности [1, 2, 3, 4, 5] показывают, что реализующие эту функцию оптимальные формулы Яблонского [6] являются минимальными (под оптимальными формулами Яблонского мы понимаем как построенные им самим формулы так и вообще класс всех формул, построенных по его несколько (естественным образом) модифицированному алгоритму). Гипотеза состоит в том, что любая реализующая линейную булеву функцию минимальная нормализованная формула является оптимальной формулой Яблонского.

Справедливость гипотезы при k равном целой степени двойки и при $k = 3, 5$ установлена в статьях [7, 8, 9]. Результат был изложен на языке П-схем (графических аналогов нормализованных формул). И по своей сути он является развитием идеи В. М. Храпченко, лежащей в основе его метода получения нижних оценок сложности этих схем [1, 10, 11]. Заметим, что все вышеуказанные точные нижние оценки сложности также были получены на основе этого метода.

Гипотеза справедлива и в оставшихся случаях $k = 6, 7$ (т. е. когда также известна точная нижняя оценка сложности). Первый шаг её доказательства в этих случаях был сделан в статье [12]. В ней на основе упомянутой идеи В. М. Храпченко было введено понятие аналога как П-схемы так и нормализованной формулы (в дальнейшем просто формулы), названного П-разбиением, и разработана некоторая теория представлений формул такими разбиениями. Заметим, что эти разбиения в неявном виде фигурировали во всех (кроме статьи [6]) перечисленных статьях.

Можно показать, что во всех вышеуказанных случаях (т. е. во всех случаях когда известна точная нижняя оценка сложности) любая реализующая линейную булеву функцию минимальная формула представима так называемым совершенным П-разбиением собственного прямоугольника этой функции (определения ниже). В настоящей статье установлен ряд свойств таких разбиений, на основе которых можно будет доказать, что любая представимая этими разбиениями минимальная формула действительно является оптимальной формулой Яблонского.

2 Основные определения и формулировка результатов

Напомним некоторые определения из статьи [12] и дополним их рядом необходимых новых.

Множество двоичных наборов

$$\mathrm{B}^n = \{\alpha = (\alpha_1,\ \dots\ \alpha_i,\ \dots\ \alpha_n) \mid \alpha_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n\}$$

называется *n-мерным единичным кубом* или *кубом* B^n.

Для наборов с единственной единичной компонентой введём следующие обозначения

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0, \quad \dots\ 0),\ \mathbf{e}^2 = (0, 1,\ \dots\ 0), \quad \dots \quad \mathbf{e}^n = (0,\ \dots\ 0, 1).$$

Сумму наборов $\alpha, \beta \in \mathrm{B}^n$ определим равенством

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \alpha_2 \oplus \beta_2, \dots, \alpha_n \oplus \beta_n)\ [1].$$

Пару наборов $(\alpha, \beta) \in \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ называется *ребром направления i* куба B^n, если выполнено равенство $\beta = \alpha + \mathbf{e}^i$. При $\alpha_i = 1$ это ребро будем называть *отрицательным*, при $\alpha_i = 0$ – *положительным*; $i = 1, \dots, n$. Пара наборов $(\alpha, \beta) \in \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ называется просто *ребром* куба B^n, если она является ребром направления i для некоторого $i \in \{1, \dots n\}$.

Чтобы избежать излишней громоздкости далее будем полагать, что n произвольное но фиксированное.

Через R обозначим множество всех рёбер куба B^n. Через R_i, R_i^0, R_i^1 – множество всех рёбер направления i, множество всех отрицательных рёбер направления i и множество всех положительных рёбер направления i соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Непустое подмножество $P \subseteq \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ называется *прямоугольным подмножеством* декартова квадрата куба B^n, если $P = A \times B$ для некоторых $A, B \subseteq \mathrm{B}^n$. Для краткости будем использовать жаргон и называть его *прямоугольником размерности n* или просто *прямоугольником*. При этом множества A и B будем называть соответственно *вертикальной* и *горизонтальной стороной прямоугольника P*; для произвольных $\alpha \in A$ и $\beta \in B$ множества $\{(\alpha, \gamma) \mid \gamma \in B\}$ и $\{(\gamma, \beta) \mid \gamma \in A\}$ – его *строкой с индексом α* и его *столбцом с индексом β* или просто *строкой α* и *столбцом β* соответственно; подмножество $D \subseteq P$, которое с каждой строкой и каждым столбцом этого прямоугольника имеет ровно по одному общему элементу, - его *диагональю*.

Через REC^n обозначим множество всех прямоугольников размерности n. Для произвольного прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ через $\mathrm{REC}(P)$ обозначим множество всех таких $K \in \mathrm{REC}^n$, что $K \subseteq P$.

Прямоугольник $\mathrm{X} = \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ называется *главным прямоугольником размерности n* или просто *главным прямоугольником*.

Прямоугольники

$$\mathrm{X}_i^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \mid \alpha_i = 1, \beta_i = 0\} \ \text{ и } \ \mathrm{X}_i^1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \mid \alpha_i = 0, \beta_i = 1\}$$

называются соответственно *отрицательной* и *положительной компонентами с номером i* главного прямоугольника X; $i = 1, \dots, n$.

Множество $M \subseteq \mathrm{X}$ называется (i, δ)-*однородным*, если выполнено включение $M \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$; и называется *однородным*, если существуют такие $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\delta \in \{0, 1\}$, что M является (i, δ)-однородным.

[1] $\oplus$ – сумма по модулю 2.

Будем говорить, что *прямоугольник* $P \in \mathrm{REC}^n$ *является квадратом*, если мощность его горизонтальной стороны равна мощности его вертикальной стороны.

Очевидно прямоугольник тогда и только тогда является квадратом, когда он имеет диагональ.

Диагональ D прямоугольника (квадрата) $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём *рёберной*, если для некоторого $i = \{1, \dots, n\}$ выполнено включение $D \subseteq R_i$, при этом число i будем называть *индексом* этой рёберной диагонали.

Прямоугольник $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём (i, δ)-*центрированным*, если для некоторой его диагонали D выполнено включение $D \subseteq \mathrm{R}_i^\delta$; и назовём его *центрированным*, если существуют такие $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\delta \in \{0, 1\}$, что P является (i, δ)-центрированным.

Прямоугольники $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$ называются *горизонтально* (*вертикально*) *соседними*, если $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ и вертикальная (горизонтальная) сторона P_1 равна вертикальной (горизонтальной) стороне P_2; и называются просто *соседними*, если они являются либо горизонтально, либо вертикально соседними.

Очевидно для любых двух соседних прямоугольников $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$ справедливо включение $P_1 \cup P_2 \in \mathrm{REC}^n$.

Горизонтальным (*вертикальным*) *разрезом* прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ называется такая пара $\{P_1, P_2\} \subseteq \mathrm{REC}^n$ горизонтально (вертикально) соседних прямоугольников, что $P_1 \cup P_2 = P$. Эта пара называется просто *разрезом* прямоугольника P, если она является либо горизонтальным либо вертикальным его разрезом. При этом прямоугольники P_1, P_2 называются *компонентами* соответствующего разреза.

Разбиением (конечным) множества P называется, такое семейство $U = \{Q_1, \dots Q_k\}$ непустых попарно непересекающихся его подмножеств, что справедливо равенство $Q_1 \cup \dots \cup Q_k = P$. Подмножества $Q_1, \dots Q_k$ называются *блоками* этого разбиения.

Разбиение U прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ называется *прямоугольным*, если все его блоки являются прямоугольниками.

Сужением $U|K$ прямоугольного разбиения U прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ на прямоугольник $K \in \mathrm{REC}(P)$ называется множество прямоугольников

$$\{Q \cap K \mid Q \in U,\ Q \cap K \neq \emptyset\}.$$

Гиперблоком прямоугольного разбиения U прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ называется такой прямоугольник $K \in \mathrm{REC}(P)$, что выполнено включение $U|K \subseteq U$.

Прямоугольным фрагментом или просто *фрагментом* прямоугольного разбиения U прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ называется такое подсемейство блоков $S \subseteq U$, что множество $\bigcup\limits_{Q \in S} Q$ является прямоугольником.

Через $\mathcal{H}(U)$ и $\mathcal{F}(U)$ обозначим множество всех гиперблоков и всех прямоугольных фрагментов прямоугольного разбиения U прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ соответственно.

Гиперблок $K \in \mathcal{H}(U)$ и прямоугольный фрагмент $F \in \mathcal{F}(U)$, $F = U|K$, называются *соответствующими* друг другу. Очевидно, это соответствие является взаимно однозначным.

Заметим, что блоки прямоугольного разбиения U являются гиперблоками этого разбиения. Эти гиперблоки называются *элементарными.* Гиперблоки из множества $\mathcal{H}(U) \setminus U$ называются *составными.* Кроме того сам прямоугольник P является гиперблоком. Этот гиперблок называется *главным* и обозначается $\widehat{U}$.

В дальнейшем прямоугольное разбиения U прямоугольника P для краткости будем также называть просто *прямоугольным разбиением* U, имея в виду, что U является прямоугольным разбиением прямоугольника $\widehat{U}$.

Два гиперблока $P_1, P_2 \in \mathcal{H}(U)$ прямоугольного разбиения U будем называть *горизонтально* (*вертикально*) *соседними*, если горизонтально (вертикально) соседними являются прямоугольники P_1, P_2; и – просто *соседними*, если они являются либо горизонтально либо вертикально соседними.

Очевидно объединение любых двух соседних гиперблоков прямоугольного разбиения U также является гиперблоком U. Он называется *соединением* этих двух гиперблоков.

Горизонтальным (*вертикальным*) *разрезом гиперблока* $P \in \mathcal{H}(U)$ прямоугольного разбиения U назовём такой горизонтальный (вертикальный) разрез прямоугольника P, что его компоненты являются гиперблоками U. Как горизонтальный так и вертикальный разрез гиперблока P будем также называть просто *разрезом гиперблока* P.

Гиперблок прямоугольного разбиения U называется *горизонтально* (*вертикально*) *разделимым*, если существует горизонтальный (вертикальный) разрез этого гиперблока; в противном случае он называется *горизонтально* (*вертикально*) *неразделимым.*

Гиперблок прямоугольного разбиения U называется *разделимым*, если он либо горизонтально либо вертикально разделим; в противном случае он называется *неразделимым.*

Прямоугольное разбиение называется *разделимым*, если каждый его составной гиперблок является разделимым.

Прямоугольное разбиение называется *однородным*, если каждый его блок является однородным множеством.

П-*разбиением* называется такое прямоугольное разбиение, которое является одновременно однородным и разделимым.

Размерностью П-разбиения назовём размерность его главного гиперблока.

Через Π^n обозначим множество всех П-разбиений размерности n.

Булеву функцию будем называть *тривиальной*, если она тождественно равна константе, и – *нетривиальной* в противном случае.

Для определённости полагаем, что переменные рассматриваемых булевых функций принадлежат множеству $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

Очевидно для любой зависящей от n переменных нетривиальной булевой функции f справедливо включение $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) \in \mathrm{REC}^n$. Прямоугольник $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ называется *собственным прямоугольником* функции f.

Очевидно класс реализующих линейную булеву функцию минимальных формул не зависит от фиктивных переменных и от порядка следования существенных переменных функции. Поэтому при описании этого класса можно считать, что любая линейная булева функция зависит от набора переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Линейной булевой функцией с множеством образующих $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I \neq \emptyset$, и *показателем* $\delta \in \{0, 1\}$ назовём функцию

$$f_I^\delta(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus\nolimits_{i \in I} x_i \oplus \delta \oplus 1.$$

Булеву функцию будем называть просто *линейной*, если она является одной из функций f_I^δ.

Через Φ_I^δ обозначим собственный прямоугольник функции f_I^δ. И пусть $\mathrm{N}_I^\delta = \{\alpha \in \mathrm{B}^n \mid \bigoplus_{i \in I} \alpha_i = \delta\}$.

Заметим, что для любых $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $I \neq \emptyset$, и $\delta \in \{0, 1\}$ имеет место равенство $\Phi_I^\delta = \mathrm{N}_I^{\delta \oplus 1} \times \mathrm{N}_I^\delta$.

Прямоугольник $L \in \mathrm{REC}^n$ назовём *линейным множеством* или (используя жаргон) *линейным прямоугольником*, если существует такое k, $1 \leq k \leq n$, и такие две последовательности $J = I_1, \ldots, I_k$ и $\Delta = \delta_1, \ldots, \delta_k$, что $\{1,\ldots,\mathrm{n}\} \supseteq I_1 \supset I_2, \ldots, \supset I_k \supset \emptyset$, $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \{0, 1\}$ и выполнено равенство $L = \Phi_{I_1}^{\delta_1} \cap \cdots \cap \Phi_{I_k}^{\delta_k}$. При этом число k будем называть *мощностным рангом* линейного множества L; J – его *нижней характеристической последовательностью*; Δ – его *верхней характеристической последовательностью*, I_k – множеством его *образующих*, δ_k – его *показателем.*

Нетрудно показать (используя простейшие соображения из области решения систем линейных уравнений), что для любых вышеуказанных k, J и Δ справедливо включение $\Phi_{I_1}^{\delta_1} \cap \cdots \cap \Phi_{I_k}^{\delta_k} \in \mathrm{REC}^n$ и для любого линейного множества $L \in \mathrm{REC}^n$ его мощностной ранг и нижняя и верхняя характеристические последовательности определены однозначно.

Для произвольных целых p и k, $1 \leq p \leq k$, и любого набора множеств $I_1, \ldots, I_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ последовательность $I_1, \ldots, I_p$ будем называть *началом* последовательности $I_1, \ldots, I_k$; точно также для любого набора чисел $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \{0, 1\}$ последовательность $\delta_1, \ldots, \delta_p$ будем называть *началом* последовательности $\delta_1, \ldots, \delta_k$.

Линейное множество $M \in \mathrm{REC}^n$ назовём *собственным линейным подмножеством линейного множества* $L \in \mathrm{REC}^n$, если нижняя характеристическая последовательность L является началом нижней характеристической последовательности M, и верхняя характеристическая последовательность L является началом верхней характеристической последовательности M.

Линейное множество назовём *элементарным*, если мощность множества его образующих равна 1. В противном случае назовём его *неэлементарным.*

Собственное линейное подмножество линейного множества $L \in \mathrm{REC}^n$ назовём *элементарным*, ели оно является элементарным линейным множеством.

Заметим, что для любого линейного прямоугольника $L = A \times S$ с множеством образующих I и любого $X \subset I$ пара множеств $S_0 = S \cap \mathrm{N}_X^0$ и $S_1 = S \cap \mathrm{N}_X^1$ представляет собой разбиение горизонтальной стороны S этого прямоугольника. И существует ещё только одно подмножество $Y = I \setminus X$ множества I, для которого справедливо равенство $\{S_0, S_1\} = \{S \cap \mathrm{N}_Y^0, S \cap \mathrm{N}_Y^1\}$. Поэтому для любого разбиения $\{X, Y\}$ множества I две пары прямоугольников

$$\{A \times (S \cap \mathrm{N}_X^0),\ A \times (S \cap \mathrm{N}_X^1)\} \quad \text{и} \quad \{A \times (S \cap \mathrm{N}_Y^0),\ A \times (S \cap \mathrm{N}_Y^1)\}$$

представляют собой один и тот же горизонтальный разрез прямоугольника $L = A \times S$. Этот разрез назовём *линейным горизонтальным разрезом линейного прямоугольника* L, а разбиение $\{X, Y\}$ множества I – его *характеристикой.*

И точно также для любого разбиения $\{X, Y\}$ множества I две пары прямоугольников

$$\{(A \cap \mathrm{N}_X^0) \times S,\ (A \cap \mathrm{N}_X^1) \times S\} \quad \text{и} \quad \{(A \cap \mathrm{N}_Y^0) \times S,\ (A \cap \mathrm{N}_Y^1) \times S\}$$

представляют собой один и тот же вертикальный разрез прямоугольника $L = A \times S$. Этот разрез назовём *линейным вертикальным разрезом линейного прямоугольника* L, а разбиение $\{X, Y\}$ – его *характеристикой.*

Очевидно характеристики любого линейного горизонтального разреза и любого линейного вертикального разреза любого линейного прямоугольника определены однозначно.

Двойным разрезом прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём такую четвёрку прямоугольников $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\} \subseteq \mathrm{REC}(P)$, что для некоторого горизонтального разреза $A = \{A_1, A_2\}$ и некоторого вертикального разреза $B = \{B_1, B_2\}$ этого прямоугольника справедливо равенство $C = \{A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_1, A_2 \cap B_2\}$. Входящие в эту четвёрку прямоугольники назовём *компонентами* двойного разреза C. Разрезы A и B будем называть *разрезами, порождающими двойной разрез* C; а двойной разрез C – *порождённым разрезами* A и B.

Очевидно для любого двойного разреза C прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ существует единственный порождающий C горизонтальный разрез A и единственный порождающий C вертикальный разрез B этого прямоугольника.

Матрицу

$$\begin{pmatrix} A_1 \cap B_1 & A_2 \cap B_1 \\ A_1 \cap B_2 & A_2 \cap B_2 \end{pmatrix}$$

назовём *матрицей двойного разреза* C прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$, порождённого горизонтальным разрезом $A = \{A_1, A_2\}$ и вертикальным разрезом $B = \{B_1, B_2\}$ этого прямоугольника.

Другими словами матрицей двойного разреза называется такая составленная из компонент этого разреза матрица размера 2×2, что любые два различные её элемента тогда и только тогда являются горизонтально соседними прямоугольниками, когда они находятся в одной строке, и любые два различные её элемента тогда и только тогда являются вертикально соседними прямоугольниками, когда они находятся в одном столбце.

Заметим, что матрица двойного разреза определена с точностью до перестановки строк и столбцов (в том смысле, что любая перестановка её строк и столбцов приводит к матрице, которая также является матрицей того же двойного разреза).

Двойной разрез линейного прямоугольника L назовём *линейным двойным разрезом* этого прямоугольника, если порождающие его горизонтальный и вертикальный разрезы являются линейными и имеют одну и ту же характеристику. *Характеристикой линейного двойного разреза* линейного прямоугольника L назовём общую характеристику порождающих его линейных разрезов.

Очевидно характеристика любого линейного двойного разреза любого линейного прямоугольника определена однозначно.

Двойным разрезом гиперблока $P \in \mathcal{H}(U)$ П-разбиения U назовём такой двойной разрез прямоугольника P, что все его компоненты являются гиперблоками U.

Горизонтальным (*вертикальным*) *разрезом* П-*разбиения* U будем называть любой горизонтальный (вертикальный) разрез главного гиперблока $\widehat{U}$ этого разбиения.

Двойным разрезом П-*разбиения* U будем называть любой двойной разрез главного гиперблока $\widehat{U}$ этого разбиения.

Горизонтальный (вертикальный) разрез П-разбиения U линейного множества L назовём *линейным*, если он является линейным горизонтальным (линейным вертикальным) разрезом главного гиперблока $\widehat{U} = L$ этого разбиения.

Двойной разрез П-разбиения U линейного множества L назовём *линейным*, если он является линейным двойным разрезом главного гиперблока $\widehat{U} = L$ этого разбиения.

П-разбиение назовём *совершенным*, если каждый его блок является центрированным прямоугольником.

П-разбиение линейного множества назовём *линейным*, если каждый его блок является элементарным собственным линейным подмножеством этого линейного множества.

Для любого неэлементарного линейного прямоугольника $L \in \mathrm{REC}^n$ с множеством образующих I и любых $X \subset I$, $X \neq \emptyset$, и $\delta \in \{0,1\}$, собственное линейное подмножество $L \cap \Phi_X^\delta$ линейного множества L обозначим через L_X^δ.

Прямоугольники $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$ назовём *горизонтально* (*вертикально*) *смежными*, если вертикальные (горизонтальные) их стороны имеют непустое пересечение.

Будем говорить, что два гиперблока $P, K \in \mathcal{H}(U)$ П-разбиения U являются *взаимно простыми*, если либо они являются горизонтально соседними и любые два блока $Q \subseteq P$ и $T \subseteq K$ этого разбиения являются горизонтально смежными прямоугольниками; либо они являются вертикально соседними и любые два блока $Q \subseteq P$ и $T \subseteq K$ этого разбиения являются вертикально смежными прямоугольниками.

Двойной разрез гиперблока П-разбиения U назовём *простым*, если любые две соседние компоненты этого разреза являются взаимно простыми гиперблоками U.

Результатом настоящей статьи являются следующие три теоремы.

Теорема 1. *При любом целом положительном n любое совершенное* П*-разбиение любого неэлементарного линейного множества $L \in \mathrm{REC}^n$ имеет единственный двойной разрез. Этот разрез является линейным. Если множество $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$ и число $\delta \in \{0,1\}$ являются множеством образующих и показателем L соответственно, а разбиение $\{X,Y\}$ множества I – характеристикой этого линейного двойного разреза, то матрица*

$$\begin{pmatrix} L_X^0 & L_Y^{\delta\oplus 1} \\ L_Y^\delta & L_X^1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

является его матрицей.

Теорема 2. *При любом целом положительном n любое* П*-разбиение любого линейного множества $L \in \mathrm{REC}^n$ тогда и только тогда является совершенным, когда оно является линейным.*

Теорема 3. *При любом целом положительном n двойной разрез любого совершенного* П*-разбиения любого неэлементарного линейного множества $L \in \mathrm{REC}^n$ является простым.*

3 Доказательство теоремы 1

Чтобы не перегружать изложение, ограничимся доказательством теоремы в частном случае $L = \Phi_I^1 = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$, $|I| > 1$, (т. е. в случае неэлементарного линейного множества с мощностным рангом 1 и показателем 1). В общем случае доказательство отличается лишь большей громоздкостью, но опирается на те же самые идеи и проводится аналогично.

Пусть U – произвольное совершенное П-разбиение прямоугольника L.

Лемма 1. *При любом $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$, $I \neq \emptyset$, любой линейный прямоугольник $K \in \mathrm{REC}^n$ с множеством образующих I имеет ровно $|I|$ рёберных диагоналей по одной для каждого индекса $i \in I$. Они попарно не пересекаются и содержат все принадлежащие K рёбра куба B^n.*

Доказательство. Лемма 1 очевидным образом вытекает из определения линейного прямоугольника с множеством образующих I. □

Лемма 2. *Любой центрированный прямоугольник $P \in \mathrm{REC}^n$ имеет единственную рёберную диагональ. Она содержит все принадлежащие P рёбра куба B^n.*

Доказательство. По определению центрированный прямоугольник P имеет такую рёберную диагональ D, что для некоторых i, δ выполнено включение $D \subseteq \mathrm{R}_i^\delta$. Непосредственно из определений следует, что множество R_i^δ является рёберной диагональю прямоугольника X_i^δ. Поэтому справедливо включение $P \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. Кроме того очевидно справедливо равенство $\mathrm{X}_i^\delta = \mathrm{N}_{\{i\}}^{\delta\oplus 1} \times \mathrm{N}_{\{i\}}^{\delta} = \Phi_{\{i\}}^{\delta}$. По лемме 1 линейный прямоугольник $\Phi_{\{i\}}^{\delta} = \mathrm{X}_i^\delta$ имеет единственную рёберную диагональ и не содержит ни каких других рёбер кроме рёбер этой диагонали. Следовательно то же самое справедливо и для P. □

Лемма 3. *Если для некоторых $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $\gamma \in \mathrm{B}^n$ центрированный прямоугольник $P \in \mathrm{REC}^n$ содержит ребро $(\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i)$, то справедливо включение $P \subseteq \mathrm{X}_i^{\gamma_i \oplus 1}$.*

Доказательство. По определению ребро $(\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i)$ принадлежит множеству $\mathrm{R}_i^{\gamma_i\oplus 1}$. А по лемме 2 оно принадлежит единственной рёберной диагонали D прямоугольника P. Следовательно справедливо включение $D \subseteq \mathrm{R}_i^{\gamma_i\oplus 1}$ а, значит, и включение $P \subseteq \mathrm{X}_i^{\gamma_i\oplus 1}$. □

Лемма 4. *Главный гиперблок $\widehat{U}$ совершенного* П*-разбиения U прямоугольника L является составным.*

Доказательство. Предположим противное: главный гиперблок $\widehat{U} = L$ не является составным, т. е. он является элементарным. Тогда по определению для некоторых $i \in \{1,\ldots,n\}$ и $\delta \in \{0,1\}$ выполнено включение $\widehat{U} \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. Из равенств $\widehat{U} = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$ и $\mathrm{X}_i^\delta = \mathrm{N}_{\{i\}}^{\delta\oplus 1} \times \mathrm{N}_{\{i\}}^{\delta}$ следует $|\widehat{U}| = |\mathrm{X}_i^\delta|$. Поэтому справедливо равенство $\widehat{U} = \mathrm{X}_i^\delta$. Но это противоречит тому, что по лемме 1 линейные прямоугольники $\mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1 = \Phi_I^1$ и $\mathrm{N}_{\{i\}}^{\delta\oplus 1} \times \mathrm{N}_{\{i\}}^{\delta} = \Phi_{\{i\}}^{\delta}$ имеют соответственно $|I| > 1$ и $|\{i\}| = 1$ рёберных диагоналей. □

Лемма 5. *Любой горизонтальный и любой вертикальный разрез совершенного* П*-разбиения U прямоугольника L является линейным.*

Доказательство. Разберём случай горизонтального разреза (случай вертикального разреза рассматривается аналогично). Пусть $C = \{C_0, C_1\}$

это произвольный горизонтальный разрез П-разбиения U (т. е. горизонтальный разрез главного его гиперблока $\widehat{U} = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$).

Через S_0 и S_1 обозначим горизонтальные стороны компонент соответственно C_0 и C_1 разреза C. Тогда очевидно выполнены равенства

$$C_0 = \mathrm{N}_I^0 \times S_0, \quad C_1 = \mathrm{N}_I^0 \times S_1, \quad S_0 \cap S_1 = \emptyset, \quad S_0 \cup S_1 = \mathrm{N}_I^1.$$

Покажем, что для некоторого разбиения $\{X, Y\}$ множества I справедливы равенства

$$S_0 = N_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0 \quad \text{и} \quad S_1 = N_I^1 \cap \mathrm{N}_X^1. \tag{2}$$

Это по определению и означает, что C является линейным горизонтальным разрезом гиперблока $\widehat{U}$ а, значит, и П-разбиения U.

Для произвольного $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $J \neq \emptyset$, множество

$$\mathrm{B}_J = \{\alpha \in \mathrm{B}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus J \;\; \alpha_i = 0\}$$

назовём *подкубом куба* B^n *с множеством образующих* J.

Для произвольных $\alpha \in \mathrm{B}^n$, и $A, G \subseteq \mathrm{B}^n$ через $\alpha + A$, $A + \alpha$ и $A + G$ обозначим множества

$$\alpha + A = A + \alpha = \{\alpha + \beta \mid \beta \in A\} \quad \text{и} \quad A + G = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A, \beta \in G\}.$$

Предложение 1. *Для любого* $\gamma \in \mathrm{N}_I^0$ *существует такое разбиение* $\{X, Y\}$ *множества* I*, что справедливы включения*

$$\gamma + (\mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{B}_Y) \subseteq S_0 \quad \text{и} \quad \gamma + (\mathrm{N}_X^1 \cap \mathrm{B}_X) \subseteq S_1. \tag{3}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует,что каждая строка прямоугольника $L = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$ содержит ровно $|I|$ рёбер куба B^n. И более того для каждого $i \in I$ среди этих рёбер имеется ровно одно ребро направления $i \in I$. Поэтому для произвольного $\gamma \in \mathrm{N}_I^0$ строка с индексом γ содержит $|I|$ рёбер $(\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i)$, $i \in I$. В качестве соответствующего этому γ разбиения $\{X, Y\}$ множества I рассмотрим пару множеств

$$X = \{i \in I \mid (\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i) \in C_1\} \;\; \text{и} \;\; Y = \{i \in I \mid (\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i) \in C_0\}.$$

Другими словами X это множество номеров направлений тех рёбер строки γ, которые принадлежат компоненте C_1, а Y – компоненте C_0 разреза C. Тогда

$$\mathrm{E}_\gamma(X) = \{(\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i) \mid i \in X\} \quad \text{и} \quad \mathrm{E}_\gamma(Y) = \{(\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i) \mid i \in Y\}$$

есть соответственно множество лежащих в C_1 и множество лежащих в C_0 рёбер строки γ.

В силу леммы 2 любой имеющий непустое пересечение со строкой γ блок совершенного П-разбиение U содержит ровно одно ребро из этой строки. Поэтому строка γ пересекает ровно $|I|$ блоков U. Кроме того очевидно объединение горизонтальных сторон блоков, содержащих рёбра из $\mathrm{E}_\gamma(X)$, равно S_1. Следовательно для любого $\alpha \in S_1$ существует такое $i \in X$, что столбец с индексом α прямоугольника L пересекает содержащий ребро $(\gamma, \gamma + \mathbf{e}^i)$ блок разбиения U. В силу леммы 3 этот блок включается в $\mathrm{X}_i^{\gamma_i \oplus 1}$ и, значит, $\alpha_i = \gamma_i \oplus 1$. Таким образом для любого $\alpha \in S_1$ существует такое $i \in X$, что справедливо равенство $\alpha_i = \gamma_i \oplus 1$. Поэтому в силу равенств $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ и $S_0 \cup S_1 = \mathrm{N}_I^1$ справедливо включение

$$\{\alpha \in \mathrm{N}_I^1 \mid \forall i \in X \ \alpha_i = \gamma_i\} \subseteq S_0.$$

Кроме того из определения подкуба B_Y и из того, что пара $\{X, Y\}$ является разбиением множества I, следует равенство

$$\gamma + (\mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{B}_Y) = \{\alpha \in \mathrm{N}_I^1 \mid \forall i \in X \ \alpha_i = \gamma_i\}.$$

Поэтому справедливо включение $\gamma + (\mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{B}_Y) \subseteq S_0$, т. е. справедливо первое из включений (3).

Точно также объединение горизонтальных сторон блоков, содержащих рёбра из $\mathrm{E}_\gamma(Y)$, равно S_0. Следовательно для любого $\beta \in S_0$ существует такое $j \in Y$, что $\beta_j = \gamma_j \oplus 1$. Поэтому справедливо

$$\gamma + (\mathrm{N}_X^1 \cap \mathrm{B}_X) = \{\beta \in \mathrm{N}_I^1 \mid \forall i \in Y \ \beta_i = \gamma_i\} \subseteq S_1,$$

т. е. справедливо второе из включений (3). □

Предложение 2. *Если для некоторого набора $\gamma \in \mathrm{N}_I^0$ и некоторого разбиения (X, Y) множества I справедливы включения (3), то и при всех $\alpha \in (\mathrm{N}_X^0 \cap \mathrm{B}_X)$ и $\beta \in (\mathrm{N}_Y^0 \cap \mathrm{B}_Y)$ для наборов $\gamma + \alpha$ и $\gamma + \beta$ справедливы включения*

$$(\gamma + \alpha) + (\mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{B}_Y) \subseteq S_0 \quad \text{и} \quad (\gamma + \beta) + (\mathrm{N}_X^1 \cap \mathrm{B}_X) \subseteq S_1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть для набора $\gamma \in \mathrm{N}_I^0$ и разбиения $\{X, Y\}$ множества I справедливы включения (3).

Для произвольного $\alpha \in (\mathrm{N}_X^0 \cap \mathrm{B}_X)$ докажем первое из включений (4). Из очевидного включения $(\mathrm{N}_X^0 \cap \mathrm{B}_X) \subseteq \mathrm{N}_I^0$ следует $\alpha \in \mathrm{N}_I^0$. Значит, справедливо включение $(\gamma + \alpha) \in \mathrm{N}_I^0$. Следовательно по предложению 1 существует такое разбиение $\{X', Y'\}$ множества I, что справедливы включения

$$(\gamma + \alpha) + (\mathrm{N}_{Y'}^1 \cap \mathrm{B}_{Y'}) \subseteq S_0 \ \text{ и } \ (\gamma + \alpha) + (\mathrm{N}_{X'}^1 \cap \mathrm{B}_{X'}) \subseteq S_1. \tag{5}$$

Поэтому, чтобы доказать первое из включений (4), достаточно доказать равенство $X' = X$ (очевидно из $X' = X$ следует $Y' = Y$).

Предположим противное: $X' \neq X$. Тогда возможен один из следующих двух случаев: $X \subset X'$ или $Y' \cap X \neq \emptyset$.

В первом случае очевидно выполнено неравенство $X' \cap Y \neq \emptyset$. Для произвольного $i \in X' \cap Y$ из $i \in Y$ следует $\mathbf{e}^i \in \mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{B}_Y$. Отсюда и из первого из включений (3) следуют включения

$$\gamma + \mathbf{e}^i \in \gamma + (\mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{B}_Y) \subseteq S_0.$$

Кроме того из $X \subset X'$ следует $(\mathrm{N}_X^0 \cap \mathrm{B}_X) \subseteq (\mathrm{N}_{X'}^0 \cap \mathrm{B}_{X'})$. Поэтому справедливо включение $\alpha \in (\mathrm{N}_{X'}^0 \cap \mathrm{B}_{X'})$. Значит, для вышеуказанного

$i \in X' \cap Y$ из $i \in X'$ следует $(\alpha + \mathbf{e}^i) \in (\mathrm{N}^1_{X'} \cap \mathrm{B}_{X'})$. Отсюда и из второго из включений (5) следуют включения

$$\gamma + \mathbf{e}^i = (\gamma + \alpha) + (\alpha + \mathbf{e}^i) \in (\gamma + \alpha) + (\mathrm{N}^1_{X'} \cap \mathrm{B}_{X'}) \subseteq S_1.$$

Но это противоречит равенству $S_0 \cap S_1 = \emptyset$.

Во втором случае для произвольного $i \in Y' \cap X$ из включения $i \in Y'$ следует $\mathbf{e}^i \in \mathrm{N}^1_{Y'} \cap \mathrm{B}_{Y'}$. Отсюда и из первого из включений (5) следуют включения

$$(\gamma + \alpha) + \mathbf{e}^i \in (\gamma + \alpha) + (\mathrm{N}^1_{Y'} \cap \mathrm{B}_{Y'}) \subseteq S_0.$$

Кроме того из включений $i \in X$ и $\alpha \in (\mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{B}_X)$ следует $\alpha + \mathbf{e}^i \in \mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{B}_X$. Отсюда и из второго из включений (3) следуют включения

$$(\gamma + \alpha) + \mathbf{e}^i = \gamma + (\alpha + \mathbf{e}^i) \in \gamma + (\mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{B}_X) \subseteq S_1.$$

Это также противоречит равенству $S_0 \cap S_1 = \emptyset$.

Следовательно наше предположение неверно и, значит, справедливо равенство $X' = X$. Первое из включений (4) доказано.

Для произвольного $\beta \in (\mathrm{N}^0_Y \cap \mathrm{B}_Y)$ второе из включений (4) доказывается аналогично. □

Предложение 3. *Для любого разбиения $\{X, Y\}$ множества I справедливы равенства*

$$N^1_I \cap \mathrm{N}^0_X = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{B}_X} (\alpha + (\mathrm{N}^1_Y \cap \mathrm{B}_Y)),$$

$$N^1_I \cap \mathrm{N}^1_X = \bigcup_{\beta \in \mathrm{N}^0_Y \cap \mathrm{B}_Y} (\beta + (\mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{B}_X)).$$

Доказательство. Предложение 3 является следствием очевидных равенств

$$N^1_I \cap \mathrm{N}^0_X = \mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{N}^1_Y = (\mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{B}_X) + (\mathrm{N}^1_Y \cap \mathrm{B}_Y) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{B}_X} (\alpha + (\mathrm{N}^1_Y \cap \mathrm{B}_Y)),$$

$$N^1_I \cap \mathrm{N}^1_X = \mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{N}^0_Y = (\mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{B}_X) + (\mathrm{N}^0_Y \cap \mathrm{B}_Y) = \bigcup_{\beta \in \mathrm{N}^0_Y \cap \mathrm{B}_Y} ((\mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{B}_X) + \beta).$$

□

Лемма 5 является простым следствием предложений 1, 2, 3. Действительно по предложению 1 для $\gamma = (0, \ldots, 0) \in \mathrm{N}^0_I$ существует такое разбиение $\{X, Y\}$ множества I, что справедливы включения

$$\gamma + (\mathrm{N}^1_Y \cap \mathrm{B}_Y) \subseteq S_0 \quad \text{и} \quad \gamma + (\mathrm{N}^1_X \cap \mathrm{B}_X) \subseteq S_1.$$

Следовательно в силу предложений 3 и 2 имеем

$$N^1_I \cap \mathrm{N}^0_X = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{B}_X} (\alpha + (\mathrm{N}^1_Y \cap \mathrm{B}_Y)) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{N}^0_X \cap \mathrm{B}_X} ((\gamma + \alpha) + (\mathrm{N}^1_Y \cap \mathrm{B}_Y)) \subseteq S_0,$$

$$N_I^1 \cap \mathrm{N}_X^1 = \bigcup_{\beta \in \mathrm{N}_Y^0 \cap \mathrm{B}_Y} (\beta + (\mathrm{N}_X^1 \cap \mathrm{B}_X)) = \bigcup_{\beta \in \mathrm{N}_Y^0 \cap \mathrm{B}_Y} ((\gamma + \beta) + (\mathrm{N}_X^1 \cap \mathrm{B}_X)) \subseteq S_1.$$

Поэтому справедливы включения $N_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0 \subseteq S_0$ и $N_I^1 \cap \mathrm{N}_X^1 \subseteq S_1$. Очевидно эти включения равносильны равенствам (2). $\square$

Лемма 6. *Если существует горизонтальный разрез совершенного* П-*разбиения U прямоугольника L, то он являет единственны его горизонтальным разрезом. И если существует вертикальный разрез этого разбиения, то он являет единственны его вертикальным разрезом.*

Доказательство. Рассмотрим случай горизонтального разреза (случай вертикального рассматривается аналогично). Предположим противное: существуют два различных горизонтальных разреза $\{C_0, C_1\}$ и $\{T_0, T_1\}$ совершенного П-разбиения U прямоугольника L. Тогда по лемме 5 оба они являются линейными и, значит, $|C_0| = |C_1|$ и $|T_0| = |T_1|$. Поэтому очевидно $C_0 \cap T_0 \neq \emptyset$ и пара прямоугольников $K_0 = C_0 \cap T_0$ и $K_1 = T_1 \cup (C_0 \setminus (C_0 \cap T_0))$ представляет собой горизонтальный разрез П-разбиения U. По лемме 5 этот разрез является линейным. Но это противоречит очевидному неравенству $|K_0| < |K_1|$. Следовательно наше предположение неверно и, значит, П-разбиения U может иметь не больше одного горизонтального разреза. $\square$

Лемма 7. *Если для некоторого разбиения $\{X, Y\}$ множества образующих I прямоугольника L совершенное* П-*разбиения U этого прямоугольника имеет линейный горизонтальный разрез с характеристикой $\{X, Y\}$, то оно также имеет и линейный вертикальный разрез с той же характеристикой. При $\delta = 1$ матрица* (1) *является матрицей порождённого этими двумя разрезами двойного разреза* П-*разбиения U.*

Доказательство. Через $C = \{C_0, C_1\}$ обозначим линейный горизонтальный разрез с характеристикой $\{X, Y\}$ совершенного П-разбиения U. По определению C является линейным горизонтальным разрезом с характеристикой $\{X, Y\}$ главного гиперблока $\widehat{U} = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$ этого разбиения. Через $T = \{T_0, T_1\}$ обозначим линейный вертикальный разрез с той же характеристикой прямоугольника $L = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$. Через W обозначим порождённый разрезами C и T двойной разрез прямоугольника L. Тогда по определению и в силу очевидных равенств

$$\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0 = \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^1, \quad \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^1 = \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^0,$$

$$\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_X^1 = \mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_Y^1, \quad \mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_X^0 = \mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_Y^0$$

выполнены равенства

$$C_0 = \mathrm{N}_I^0 \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0) = \mathrm{N}_I^0 \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^1), \quad C_1 = \mathrm{N}_I^0 \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^1) = \mathrm{N}_I^0 \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^0),$$

$$T_0 = (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_X^1) \times \mathrm{N}_I^1 = (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_Y^1) \times \mathrm{N}_I^1, \quad T_1 = (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_X^0) \times \mathrm{N}_I^1 = (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_Y^0) \times \mathrm{N}_I^1.$$

Поэтому для матрицы двойного разреза W справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} C_0 \cap T_0 & C_1 \cap T_0 \\ C_0 \cap T_1 & C_1 \cap T_1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_X^1) \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0) & (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_Y^1) \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^0) \\ (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_Y^0) \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^1) & (\mathrm{N}_I^0 \cap \mathrm{N}_X^0) \times (\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (\mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1) \cap (\mathrm{N}_X^1 \times \mathrm{N}_X^0) & (\mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1) \cap (\mathrm{N}_Y^1 \times \mathrm{N}_Y^0) \\ (\mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1) \cap (\mathrm{N}_Y^0 \times \mathrm{N}_Y^1) & (\mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1) \cap (\mathrm{N}_X^0 \times \mathrm{N}_X^1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} L \cap \Phi_X^0 & L \cap \Phi_Y^0 \\ L \cap \Phi_Y^1 & L \cap \Phi_X^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_X^0 & L_Y^0 \\ L_Y^1 & L_X^1 \end{pmatrix}.$$

Т. е. при $\delta = 1$ матрица (1) является матрицей двойного разреза W.

Покажем, что вертикальный разрез T прямоугольника L является вертикальным разрезом П-разбиения U, т. е. что любой блок U включается либо в T_0 либо в T_1. Для этого достаточно доказать, что для произвольного $Q \in U$ из неравенства $Q \cap T_0 \neq \emptyset$ следует включение $Q \subseteq T_0$. Докажем это.

В силу того, что разрез C является горизонтальным разрезом П-разбиения U, справедливо одно из включений $Q \subseteq C_0$ или $Q \subseteq C_1$. Без ограничения общности полагаем $Q \subseteq C_0$. Заметим, что прямоугольник C_0 является соединением (объединением) вертикально соседних компонент $L_X^0 = C_0 \cap T_0$ и $L_Y^1 = C_0 \cap T_1$ двойного разреза W. Кроме того из неравенства $Q \cap T_0 \neq \emptyset$ следует $Q \cap L_X^0 \neq \emptyset$.

Предположим, что и $Q \cap L_Y^1 \neq \emptyset$. Тогда очевидно пара прямоугольников $Q \cap L_X^0$ и $Q \cap L_Y^1$ представляет собой вертикальный разрез прямоугольника Q. И, значит, единственная рёберная диагональ D центрированного прямоугольника Q имеет непустое пересечение как с L_X^0 (линейным прямоугольником с множеством образующих X) так и с L_Y^1 (линейным прямоугольником с множеством образующих Y). Следовательно по лемме 1 для индекса k диагонали D справедливо включение $k \in X \cap Y$. Но это противоречит тому, что пара $\{X, Y\}$ является разбиением множества I и следовательно $X \cap Y = \emptyset$. Поэтому наше предположение неверно и, значит, $Q \cap L_Y^1 = \emptyset$. Следовательно справедливо равенство $Q = Q \cap L_X^0 = Q \cap (C_0 \cap T_0) = Q \cap T_0$ а, значит, и включение $Q \subseteq T_0$. Что и требовалось доказать.

Таким образом доказано, что T является линейным вертикальным разрезом с характеристикой $\{X, Y\}$ П-разбиения U. Отсюда по определению следует, что и порождённый разрезами C и T двойной разрез W является линейным двойным разрезом П-разбиения U. □

Лемма 8. *Если для некоторого разбиения $\{X, Y\}$ множества образующих I прямоугольника L совершенное* П*-разбиения U этого прямоугольника имеет линейный вертикальный разрез с характеристикой $\{X, Y\}$, то оно также имеет и линейный горизонтальный разрез с той же* *характеристикой. При* $\delta = 1$ *матрица* (1) *является матрицей порождённого этими двумя разрезами двойного разреза* П*-разбиения* U.

Доказательство. Доказательство леммы 8 аналогично доказательству леммы 7. □

Теорема 1 является простым следствием лемм 4, 5, 6, 7 и 8. Действительно по лемме 4 главный гиперблок совершенного П-разбиения U является составным. Значит, по определению он является разделимым. Без ограничения общности полагаем, что он имеет горизонтальный разрез C. По определению C является горизонтальным разрезом П-разбиения U. По лемме 5 он является линейным. По лемме 7 существует линейный вертикальный разрез T разбиения U с той же характеристикой что и C. По лемме 6 разрез C является единственным горизонтальным, а разрез T – единственным вертикальным разрезом П-разбиения U. Поэтому порождённый ими двойной разрез П-разбиения U является единственным и линейным. По лемме 7 матрица (1) при $\delta = 1$ является матрицей этого разреза.

4 Доказательство теоремы 2

Пусть $L \in \mathrm{REC}^n$ – произвольный линейный прямоугольник с множеством образующих I и показателем δ. И пусть U – произвольное его П-разбиение.

Докажем достаточность: из линейности U следует его совершенность. Рассмотрим произвольный блок Q линейного П-разбиения U. По определению Q является элементарным линейным прямоугольником, т. е. мощность множества J его образующих равна 1. Значит, по лемме 1 он имеет единственную рёберную диагональ D. Через j обозначим единственный элемент множества J, через σ – показатель прямоугольника Q. Из определения линейного прямоугольника с множеством образующих $J = \{i\}$ и показателем σ следует включение $Q \subseteq \Phi^{\sigma}_{\{i\}} = \mathrm{X}^{\sigma}_{i}$. Очевидно множество R^{σ}_{i} является рёберной диагональю прямоугольника X^{σ}_{i}. По лемме 1 линейный прямоугольник $\Phi^{\sigma}_{\{i\}} = \mathrm{X}^{\sigma}_{i}$ имеет единственную рёберную диагональ, и все принадлежащие ему рёбра куба B^n принадлежат этой диагонали. Поэтому справедливо включение $D \subseteq \mathrm{R}^{\sigma}_{i}$. Следовательно Q является центрированным прямоугольником. Что и требовалось доказать. Достаточность доказана.

Докажем необходимость: из совершенности U следует его линейность. Доказательство проведём индукцией по мощности множества образующих I линейного прямоугольника L.

Пусть $|I| = 1$. Тогда по лемме 1 прямоугольник L имеет единственную рёберную диагональ и не содержит ни каких других рёбер кроме рёбер этой диагонали. Это очевидным образом означает, что совершенное П-разбиение U прямоугольника L состоит из единственного блока $Q = L$. Кроме того по определению элементарный линейный прямоугольник L

является своим собственным линейным подмножеством. Следовательно $U = \{L\}$ является линейным П-разбиением L. Что и требовалось доказать.

Шаг индукции опирается па следующее простое утверждение.

Лемма 9. *Любое собственное линейное подмножество любого собственного линейного подмножества любого линейного прямоугольника является собственным линейным подмножеством этого прямоугольника.*

Доказательство. Пусть линейный прямоугольник K является собственным линейным подмножеством линейного прямоугольника L. И пусть линейный прямоугольник Q является собственным линейным подмножеством линейного прямоугольника K. Через I, J и F обозначим нижние характеристические последовательности прямоугольников L, K и Q соответственно Тогда по определению последовательность I является началом последовательности J, и последовательность J является началом последовательности F. Поэтому последовательность I является началом последовательности F. То же самое касается и верхних характеристических последовательностей прямоугольников L, K и Q. Значит, по определению линейный прямоугольник Q является собственным линейным подмножеством линейного прямоугольника L. □

Пусть $m > 1$ и для любого П-разбиения U любого линейного прямоугольника L с множеством образующих I доказано, что при $|I| < m$ из совершенности U следует его линейность. Покажем, что тогда и при $|I| = m$ из совершенности U следует его линейность.

Пусть $|I| = m$. По теореме 1 существует единственный линейный двойной разрез совершенного П-разбиения U прямоугольника L. Обозначим его W. И пусть разбиение $\{X, Y\}$ множества I – характеристика разреза W. Тогда по теореме 1 матрица (1) являются матрицей разреза W. Компонентами W являются её элементы – прямоугольники L^0_X, L^1_X, L^0_Y, L^1_Y. Очевидно все они являются гиперблоками U, и соответствующие им прямоугольные фрагменты

$$U^0_X = U|L^0_X, \quad U^1_X = U|L^1_X, \quad U^0_Y = U|L^0_Y, \quad U^1_Y = U|L^1_Y$$

являются их П-разбиениями. Блоки этих П-разбиений являются одновременно блоками U а, значит, – центрировонными прямоугольниками. Поэтому эти П-разбиения являются совершенными. Очевидно семейство фрагментов $\{U^0_X, U^1_X, U^0_Y, U^1_Y\}$ является разбиением множества U.

Пара $\{X, Y\}$ является разбиением множества I, поэтому справедливы строгие неравенства $|X| < |I|$, $|Y| < |I|$. По определению прямоугольники L^0_X, L^1_X, L^0_Y, L^1_Y являются линейными. Значит, по предположению индукции из совершенности П-разбиений U^0_X, U^1_X, U^0_Y, U^1_Y следует их линейность. Поэтому любой блок П-разбиения U является элементарным собственным линейным подмножеством одного из этих линейных прямоугольников. Кроме того по определению эти прямоугольники являются собственными линейными подмножествами линейного прямоугольника

L. Следовательно по лемме 9 любой блок П-разбиения U является элементарным собственным линейным подмножеством прямоугольника L. Значит, по определению U является линейным П-разбиением L. Необходимость доказана. Теорема 2 доказана.

5 Доказательство теоремы 3

Также как и в доказательстве теоремы 1 ограничимся рассмотрением частного случая $L = \Phi_I^1 = \mathrm{N}_I^0 \times \mathrm{N}_I^1$, $|I| > 1$. В общем случае доказательство отличается лишь большей громоздкостью, и проводится аналогично.

Пусть U – произвольное совершенное П-разбиение прямоугольника L. По теореме 1 существует единственный двойной разрез W этого разбиения и он является линейным. Пусть разбиение $\{X, Y\}$ множества I – его характеристика. Тогда по теореме 1 при $\delta = 1$ матрица (1) являются матрицей разреза W. Компонентами W являются её элементы. По определению любые две различные компоненты W тогда и только тогда являются соседними, когда они находятся либо в одной её строке либо в одном её столбце. Докажем, что находящиеся в первом столбце вертикально соседние компоненты L_X^0 и L_Y^1 являются взаимно простыми гиперблоками U (рассмотрение остальных трёх пар соседних компонент W проводится аналогично). Для этого нужно показать, что два произвольных блока $Q \subseteq L_X^0$ и $P \subseteq L_Y^1$ разбиения U являются вертикально смежными, т. е. что их горизонтальные стороны S_Q и S_P имеют непустое пересечение.

Поскольку прямоугольники L_X^0 и L_Y^1 являются гиперблоками U, соответствующие им прямоугольные фрагменты $U_X^0 = U|L_X^0$ и $U_Y^1 = U|L_Y^1$ является их совершенными П-разбиениями и справедливы включения $Q \in U_X^0$ и $P \in U_Y^1$. Следовательно, поскольку L_X^0 и L_Y^1 являются линейными прямоугольниками, по теореме 2 прямоугольник Q является собственным линейным подмножеством L_X^0, и прямоугольник прямоугольник P является собственным линейным подмножеством L_Y^1. В частности это означает, что Q и P являются линейными прямоугольниками.

Через $J_1, \ldots, J_q$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ обозначим нижнюю и верхнюю характеристические последовательности прямоугольника Q; через $F_1, \ldots, F_p$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ – прямоугольника P. Тогда по определению выполнены равенства

$$Q = \Phi_{J_1}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \Phi_{J_q}^{\sigma_q} \quad \text{и} \quad P = \Phi_{F_1}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap \Phi_{F_p}^{\lambda_p}.$$

А, значит, справедливы равенства

$$S_Q = \mathrm{N}_{J_1}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{J_q}^{\sigma_q} \quad \text{и} \quad S_P = \mathrm{N}_{F_1}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{F_p}^{\lambda_p}. \tag{6}$$

Поскольку Q является собственными линейным подмножеством L_X^0, нижняя характеристическая последовательность I, X и верхняя характеристическая последовательность $1, 0$ прямоугольника L_X^0 являются началами соответствующих характеристических последовательностей Q. По аналогичной причине последовательности I, Y и $1, 1$ являются началами соответственно нижней и верхней характеристических последовательностей P. Поэтому справедливы равенства

$$J_1 = F_1 = I, \quad J_2 = X, \quad F_2 = Y, \qquad \sigma_1 = \lambda_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \lambda_2 = 1.$$

Значит, по определению нижних характеристических последовательностей линейных множеств Q и P справедливы включения

$$I \supset X \supset J_3 \supset \cdots \supset J_q \supset \emptyset \qquad \text{и} \qquad I \supset Y \supset F_3 \supset \cdots \supset F_p \supset \emptyset.$$

Из этих включений и равенства $I \setminus X = Y$ следуют включения

$$I \supset (I \setminus J_q) \supset \cdots \supset (I \setminus J_3) \supset Y \quad \text{и}$$

$$I \supset (I \setminus J_q) \supset \cdots \supset (I \setminus J_3) \supset Y \supset F_3 \supset \cdots \supset F_p \supset \emptyset. \tag{7}$$

Кроме того в силу равенств (6) справедливы равенства

$$S_Q = \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0 \cap \mathrm{N}_{J_3}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{J_q}^{\sigma_q} \quad \text{и} \quad S_P = \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{N}_{F_1}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{F_p}^{\lambda_p}. \tag{8}$$

Поэтому из очевидных равенств

$$\mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_X^0 = \mathrm{N}_Y^1, \qquad \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_{J_3}^{\sigma_3} = \mathrm{N}_{I\setminus J_3}^{\sigma_3 \oplus 1}, \qquad \ldots \qquad \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_{J_q}^{\sigma_q} = \mathrm{N}_{I\setminus J_q}^{\sigma_q \oplus 1}$$

и первого из равенств (8) следует

$$S_Q = \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_{I\setminus J_q}^{\sigma_q \oplus 1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{I\setminus J_3}^{\sigma_3 \oplus 1} \cap \mathrm{N}_Y^1.$$

Отсюда и из второго из равенств (8) следует

$$S_Q \cap S_P = \mathrm{N}_I^1 \cap \mathrm{N}_{I\setminus J_q}^{\sigma_q \oplus 1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{I\setminus J_3}^{\sigma_3 \oplus 1} \cap \mathrm{N}_Y^1 \cap \mathrm{N}_{F_1}^{\lambda_1} \cap \cdots \cap \mathrm{N}_{F_p}^{\lambda_p}.$$

Поэтому множество $S_Q \cap S_P$ есть множество всех удовлетворяющих системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \bigoplus_{i \in I} \alpha_i = 1 \\ \bigoplus_{i \in I\setminus J_q} \alpha_i = \sigma_q \oplus 1 \\ \qquad \cdots \\ \bigoplus_{i \in Y} \alpha_i = 1 \\ \qquad \cdots \\ \bigoplus_{i \in F_p} \alpha_i = \lambda_p \end{cases}$$

наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{B}^n$. Из включений (7) следует, что эта система имеет треугольный вид и, значит, имеет непустое множество решений. Поэтому справедливо неравенство $S_Q \cap S_P \neq \emptyset$. Что и требовалось доказать. Теорема 3 доказана.

References

[1] V. M. Khrapchenko, *Complexity of the realization of a linear function in the class of* Π*-circuits*, Mat. Zametki, **9**:1 (1971), 35–40.

[2] K. L. Rychkov, *Lower bounds on the complexity of parallel-sequential switching circuits that realize linear Boolean functions*, Sib. Zh. Issled. Oper., **1**:4, (1994), 33–52.

[3] D. Yu. Cherukhin, *To the question of a logical representation for the parity counter*, Neform. Nauka **2**, (2009), 14–23.

[4] K. L. Rychkov, *Lower bounds on the formyla complexity of a linear Boolean function*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **11**, (2014), 165–184.

[5] K. L. Rychkov, *Complexity of the realization of a linear boolean function in the class of π-schemes*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **25**:3, (2018) 36–94.

[6] S. V. Yablonskii, *Realization of a linear function in the class of π-circuits*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nov. Ser., **94**:5, (1954), 805–806.

[7] K. L. Rychkov, *On minimal π-schemes for linear Boolean functions*, Methods of Discrete Analysis in Synthesis of Schemes for Boolean Functions, **51**, (1991), 84-104.

[8] K. L. Rychkov, *Sufficient conditions for the minimal π-schemes for linear Boolean functions to be locally non-repeat*
Diskretn. Anal. Issled. Oper., **22**:5, (2015), 71–85.

[9] K. L. Rychkov, *On the perfectness of minimal regular partitions of the edge set of the n-dimensional cube*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **26**:4, (2019), 74–107.

[10] V. M. Khrapchenko, *A method of determining lower bounds for the complexity of* Π*-schemes*, Mat. Zametki, **10**:1, (1971), 83–92.

[11] V. M. Khrapchenko, *A simplified proof of a lower complexity estimate*, Discrete Mathematics, **25**:2, (2013), 82–84.

[12] K. L. Rychkov, *Representations of normalized formulas*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **29**:4, (2022), 77–103.

Konstantin Leonidovich Rychkov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: rychkov@math.nsc.ru