

УРАВНЕНИЕ М. Г. КРЕЙНА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ АКУСТИКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Н.С. Новиков 

Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ

Abstract: The article considers the coefficient inverse problem for the acoustic equation. Authors propose new version of the I.M. Gelfand - B.M. Levitan - M.G. Krein approach, applicable for the general time form of the sounding wave. The new set of linear integral equations, equivalent to the inverse problem, is obtained.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, direct methods, integral equations.

1 Введение

Данная работа посвящена решению коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений. Такие задачи, как правило, связаны с определением параметров различных сред по данным, полученным в результате распространения в среде волнового (акустического, сейсмического или электродинамического) процесса и имеют большое практическое значение. Поэтому разработка новых методов решения таких задач представляет большой интерес.

IVANOV, I.I., NEW ANALOGUE OF M.G. KREIN EQUATION FOR THE ACOUSTIC INVERSE PROBLEM WITH THE GENERAL SOURCE FUNCTION.

© 2023 Иванов И.И.

Работа поддержана РФФИ (грант 03-01-11111).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Метод И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М. Г. Крейна, основанный на сведении коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения к семейству линейных интегральных уравнений, является одним из перспективных подходов. Его сильные стороны хорошо известны — это прямой метод определения параметров исследуемой среды без многократного решения прямой задачи и использования априорной информации о строении среды. Прямым методом решения коэффициентных обратных задач также является метод граничного управления.

Первой работой, посвящённой применению метода И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна для решения задачи о струне, является работа М.Г. Крейна [1]. В работе А.С. Благовещенского [2] впервые был предложен динамический вариант метода Крейна и доказана эквивалентность полученного семейства интегральных уравнений и обратной задачи. Помимо использования предлагаемого подхода во временной области, существует также множество работ, посвящённых спектральному варианту метода, из которых наиболее близкой к исследуемой задаче является работа А.С. Алексева и В.С. Белоносова [3]. В ней авторы рассмотрели несколько вариантов постановок обратных задач в частотной области и показали их эквивалентность.

Метод граничного управления был применён для решения задач акустики в работах [4, 5]. В работе [6] показано, что для одномерной обратной задачи акустики уравнения, полученные в методе граничного управления, после дискретизации совпадают с дискретным аналогом уравнения М.Г. Крейна. В работе [7] метод граничного управления применен для решения двумерной обратной задачи акустики. Многомерные алгоритмы решения обратных задач для гиперболических уравнений рассматривались также в работах [8, 9, 10], а в работах [11, 12, 13] были предложены численные алгоритмы решения многомерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна.

Целью данной работы является обобщение метода И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна для постановок задач, более приближенных к приложениям. В частности, интерес представляет возможность применения подхода в случае источника произвольного вида. В данный момент наиболее хорошо изученной является постановка с источником типа дельта-функции. С одной стороны, это приводит к специальной структуре данных обратной задачи и позволяет свести обратную задачу к семейству интегральных уравнений второго рода. С другой стороны, на практике такой подход подразумевает получение импульсной характеристики среды, что приводит к необходимости решать задачу деконволюции. Отметим, что источник произвольной формы по времени был рассмотрен в работе [14], но на основе подхода И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана.

2 Основные результаты

В качестве модели волнового процесса в данной работе будет рассмотрена обратная задача для уравнения акустики в случае одной пространственной переменной. Постановка имеет следующий вид:

$$u_{tt}(x, t) = L_\sigma u, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad x > 0; \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad t > 0; \quad (3)$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

Здесь оператор

$$L_\sigma u \equiv \sigma(x) \left(\frac{u_x}{\sigma(x)} \right)_x.$$

Функция $u(x, t)$ описывает колебание точек среды, а $\sigma(x)$ — акустическую жёсткость среды. Мы предполагаем, что среда находилась в состоянии покоя до момента $t = 0$, в который на среду действует расположенный на дневной поверхности $x = 0$ источник акустических волн, форма которого задаётся функцией $g(t)$. Этот источник приводит к распространению акустических волн в среде, которые отражаются от неоднородностей и возвращаются на дневную поверхность, где колебание точек среды $f(t)$ регистрируется приёмниками. Таким образом, обратная задача заключается в определении неизвестной функции $\sigma(x)$ по заданным $f(t)$, $g(t)$.

Замечание. В качестве основного уравнения задачи (1)–(4) можно рассматривать уравнение

$$\frac{1}{c^2(z)} u_{zz}(z, t) = \rho(z) \left(\frac{u_z}{\rho(z)} \right)_z,$$

где $c(z)$ — скорость распространения волн в среде, $\rho(z)$ — плотность среды. Это уравнение можно свести к (1) с помощью замены

$$x = \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}, \quad \sigma(x) = c(x)\rho(x).$$

Тем самым можно рассматривать задачу восстановления $c(x)$ (в случае, если ρ - известна), задачу восстановления $\rho(x)$ (если известна $c(x)$), или же задачу восстановления акустической жёсткости $\sigma(x)$ (если ни одна из функций $c(x)$, $\rho(x)$ неизвестна).

Отметим, что в данной работе мы считаем, что функции $f(t)$, $g(t)$ являются гладкими, и можно считать, что $f(+0) = g(+0) = 0$. Также мы будем считать, что время работы источника ограничено параметром T_g , в силу чего $g(t) = 0$ при $t > T_g$. Кроме того, нетрудно показать, что функция $u(x, t)$ обладает свойством $u(x, t) = 0$ при $t < x$. Учитывая это,

мы продолжим все рассматриваемые функции нечётным образом для значений $t < 0$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -u(x, -t), & t \leq 0. \\ f(-t) &= -f(t), \quad g(-t) = -g(t), & t \leq 0. \end{aligned}$$

Тогда задача (1)-(4) приобретает следующий вид:

$$u_{tt} = L_\sigma u, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=0} = g(t). \quad (6)$$

При этом в силу нечётного продолжения

$$u(x, t) = 0, \quad |t| < x. \quad (7)$$

Далее, введём дополнительные функции $W_1(x, t)$, $W_2(x, t)$, являющиеся решениями задач

$$W_{1tt} = L_\sigma W_1, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$W_1|_{x=0} = \delta(t), \quad W_{1x}|_{x=0} = 0; \quad (9)$$

$$W_{2tt} = L_\sigma W_2, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$W_2|_{x=0} = 0, \quad W_{2x}|_{x=0} = \delta(t). \quad (11)$$

соответственно. Тогда функции $u(x, t)$, $W_1(x, t)$, $W_2(x, t)$ связаны следующим соотношением:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)W_1(x, s)ds + \int_{\mathbb{R}} g(t-s)W_2(x, s)ds. \quad (12)$$

Замечание 2. Если функция $g(t)$ задаёт источник типа дельта-функции (как, например, в [2]), то в условиях (6) функция $f(t)$ имеет скачок при $t = 0$, а второе условие становится однородным. В результате в правой части равенства (12) остаётся только один интеграл, а скачок в данных позволяет получить классическое уравнение М.Г. Крейна второго рода (24).

Далее, соотношение (12) и условие (7) может быть использовано для получения уравнения типа И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана, как это было проделано, например, в [14]. В данной работе мы, адаптируя подход А.С. Благовещенского [2], применим к (12) дополнительное преобразование. Введём функции

$$V_j(x, t) = \int_0^x \frac{W_j(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi, \quad j = 1, 2.$$

Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{1}{\sigma(\xi)}(\cdot) d\xi$ к обеим частям равенства (12), получим:

$$H(x, t) \equiv \int_0^x \frac{u_t(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int V_1(x, s) f(t-s) ds + \frac{\partial}{\partial t} \int V_2(x, s) g(t-s) ds \quad (13)$$

Теперь рассмотрим функцию $H(x, t)$ в области $x > |t|$. В силу условия (7)

$$H_x(x, t) = \frac{u_t(x, t)}{\sigma(x)} = 0, \quad x > |t|.$$

Таким образом, в указанной области функция H зависит лишь от переменной t . Далее,

$$H_t(x, t) = \int_0^x \frac{u_{tt}(\xi, t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \frac{u_x(x, t)}{\sigma(x)} - \frac{u_x(0, t)}{\sigma(0)} = -\frac{g(t)}{\sigma(0)}.$$

Отсюда можно заключить, что в области $|t| < x$

$$H(x, t) \equiv - \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sigma(0)} d\tau. \quad (14)$$

Таким образом, равенство (13) приобретает следующий вид:

$$- \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sigma(0)} d\tau = \int_{-x}^x V_1(x, s) f'(t-s) ds + \int_{-x}^x V_2(x, s) g'(t-s) ds, \quad t \in (-x, x) \quad (15)$$

Равенство (15) отличается от классического уравнения М.Г. Крейна в том числе и тем, что содержит две неизвестные функции. При этом нетрудно показать, что функции $V_1(x, t), V_2(x, t)$ являются решениями задач

$$V_{1tt} = \hat{L}_\sigma V_1, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (16)$$

$$V_1|_{x=0} = 0, \quad V_{1x}|_{x=0} = \frac{\delta(t)}{\sigma(0)}; \quad (17)$$

$$V_{2tt} = \hat{L}_\sigma V_2 - \frac{\delta(t)}{\sigma(0)}, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (18)$$

$$V_2|_{x=0} = 0, \quad V_{2x}|_{x=0} = 0. \quad (19)$$

соответственно. Здесь

$$\hat{L}_\sigma V \equiv \frac{1}{\sigma(x)} (\sigma V_x)_x.$$

Получим соотношения, связывающие функции V_1, V_2 . Пусть $\Phi(x, t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} &= \hat{L}_\sigma \Phi, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \Phi|_{x=0} &= \theta(t), \quad \Phi_x|_{x=0} = -\delta(t); \end{aligned}$$

Тогда можно показать, что имеют место следующие представления функций V_1, V_2 :

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2\sigma(0)} (1 - \Phi(x, -t) - \Phi(x, t)); \quad (20)$$

$$V_2(x, t) = \frac{1}{2\sigma(0)} \int_0^t (1 + \Phi(x, \tau) - \Phi(x, -\tau)) d\tau - \frac{\theta_1(t)}{\sigma(0)}. \quad (21)$$

Здесь

$$\theta_1(t) = \begin{cases} t, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Теперь перепишем первое слагаемое в правой части (15), используя (20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-x}^x V_1(x, s) f(t-s) ds &= \\ &= \frac{1}{2\sigma(0)} \left[\int_{-x}^x f'(t-s) ds - \int_{-x}^x (f'(t+s) + f'(t-s)) \Phi(x, s) ds \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно воспользоваться (21), чтобы переписать второе слагаемое в правой части (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int V_2(x, s) g(t-s) ds &= \\ &= \frac{1}{2\sigma(0)} \left[-2 \int g(t-s) \theta(s) ds + \int_{-x}^x g(t-s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-x}^x (g(t-s) - g(t+s)) \Phi(x, s) ds \right]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (15), получим:

$$\begin{aligned} &-2 \int_0^{T_G} g(\tau) d\tau - \int_{-x}^x [g + f'](t-s) ds = \\ &= \int_{-x}^x \left([g - f'](t-s) - [g + f'](t+s) \right) \Phi(x, s) ds, \quad t \in (-x, x). \quad (22) \end{aligned}$$

Уравнение (22) является семейством линейных интегральных уравнений первого рода относительно неизвестной функции $\Phi(x, s)$ с параметром $x > 0$ и является обобщением уравнения М.Г. Крейна. Решив (22), можно определить акустическую жёсткость $\sigma(x)$, используя структуру функции Φ . Так, нетрудно показать, что

$$\Phi(x, x-0) = 1 - \frac{\sigma(0)}{\sigma(x)}.$$

Следовательно,

$$\sigma(x) = \frac{\sigma(0)}{(1 - \Phi(x, x-0))^2}. \quad (23)$$

Замечание 3. Функции $f(t), g(t)$, определяющие уравнение (22), связаны соотношением:

$$f(t) = \int_0^t g(t-\tau) R(\tau) d\tau.$$

Здесь $R(\tau)$ - импульсная характеристика среды. Её связь с решением обратной задачи акустики была впервые изучена М.Г. Крейном в работе

[1]. В частности, решив задачу деконволюции и используя импульсную характеристику среды, можно свести обратную задачу акустики к семейству уравнений второго рода:

$$-2R(+0)V(x, t) + \int_{-x}^x R'(t-s)V(x, s)ds = 1, \quad x > 0, t \in (-x, x). \quad (24)$$

Замечание 4. Численное решение уравнения (22) целесообразно производить на основе дискретизации и последующем решении системы линейных алгебраических уравнений. При этом отметим, что матрица системы будет плохо обусловленной. Также матрица системы в силу структуры нового аналога уравнения М.Г. Крейна будет представляться в виде суммы тёплицевой и ганкелевой матриц. Это позволит привлекать специальные методы для решения этой системы (как, например, в [11]).

Замечание 5. Предложенный подход может быть адаптирован для решения многомерных задач, с использованием техники, предложенной в работах [7, 8, 9].

Замечание 6. Предложенный подход может быть использован для решения задачи определения коэффициента $q(x)$ уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$, которое возникает при решении спектральных обратных задач. В этом случае аналог уравнения И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана принимает следующий вид:

$$\int_{-x}^x g(t-s)ds = \int_{-x}^x ([g - f'](t-s) + [g + f'](t+s)) \Phi(x, s)ds, t \in (-x, x)$$

References

- [1] Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, 94(6) (1954)
- [2] А.С. Благовещенский О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 28–38.
- [3] A. S. Alekseev and V.S. Belonosov The Scattering of Plane Waves in Inhomogeneous Half-Space Appl. Math.Lett. Vol. 8, No. 2, pp. 13-19, 1995
- [4] М. И. Белишев, Т. Л. Шеронова. Методы теории граничного управления в нестационарной обратной задаче для неоднородной струны. Математические вопросы теории распространения волн. 20, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 186, Наука, СПб., 1990, 37–49.
- [5] Belishev, M. and Blagoveshchensky, A. and Karazeeva, N. Simplest Test for the Three-Dimensional Dynamical Inverse Problem (The BC-Method). Journal of Mathematical Sciences, 252 (2021).
- [6] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Comparative analysis of boundary control and Gel'fand-Levitan methods of solving inverse acoustic problem (2003) Inverse Problems in Engineering Mechanics IV, pp. 503–512.
- [7] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem (2004) Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 12 (2), pp. 125–144.

- [8] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation (2011) *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 18 (9), pp. 979–995.
- [9] Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A. Two-dimensional analogs of the equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko (2015) *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 3 (2), pp. 70–99.
- [10] *А. В. Басев* О решении обратной задачи рассеяния для уравнения акустики в трехмерных средах. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016, том 56, номер 12, 2073–2085
- [11] *Kabanikhin, S.I., Novikov, N.S., Oseledets, I.V., Shishlenin, M.A.* Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 23 (6), pp. 687-700, 2015.
- [12] *Kabanikhin, S.I., Sabelfeld, K.K., Novikov, N.S., Shishlenin, M.A.* Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods. // *Monte Carlo Methods and Applications*, 21 (3), pp. 189-203, 2015.
- [13] *С.И. Кabanikhin, М.А. Шишленин, Н.С. Новиков* Алгоритмы определения упругих параметров по площадным системам наблюдений (прямая линейная обработка данных сейсмических наблюдений) // *Вестник кибернетики*. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 83–91.
- [14] *Д.В. Анжиев, Б.М. Каштан, А.С. Благовещенский, В.А. Мулдер* Точный динамический метод решения обратной задачи сейсмологии на основе интегральных уравнений Гельфанда - Левитана. *Учёные записки СПбГУ, Вопросы геофизики*, 444 (2011), 49–81.

NIKITA SERGEYEVICH NOVIKOV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. КОРТУГА, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: novikov-1989@yandex.ru