

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ
ГРАФОВ В БОЛЬШОЕ ЧИСЛО ЦВЕТОВМ.А. Лисицына^{ID}, С.В. Августинович^{ID}*Представлено А.В. Пяткиным*

Abstract: An infinite circulant graph with a continuous set of distances is a graph, whose set of vertices is the set of integers, and two vertices i and j are adjacent if $|i - j| \in \{1, 2, \dots, n\}$. We study perfect colorings of such graph with k colors for k at least $3n + 3$. A complete description of them is obtained.

Keywords: perfect coloring, infinite circulant graph, k -motley fragment.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \dots, k\}$ будем называть *цветами*. Отображение $\phi : V \rightarrow I$ называется *совершенной k -раскраской*, если цветовой состав всякого шара радиуса 1 в G зависит только от цвета его центра.

Бесконечный циркулянтный граф с набором дистанций $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ – это граф Кэли бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ с системой образующих $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Обозначается такой граф через $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Граф $C_\infty(\tilde{n}) \stackrel{\text{def}}{=} C_\infty(1, 2, \dots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным*

LISITSYNA, M.A., AVGUSTINOVICH, S.V., THE PERFECT COLORINGS OF CIRCULANT GRAPHS WITH A LARGE NUMBER OF COLORS.

© 2023 Лисицына М.А., Августинович С.В..

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

Поступила 24 ноября 2023 г., опубликована ?? декабря 2023 г.

графом со сплошным набором дистанций (см. рис. 1). Всюду далее вершины таких графов будем обозначать v_i для $i \in \mathbb{Z}$.

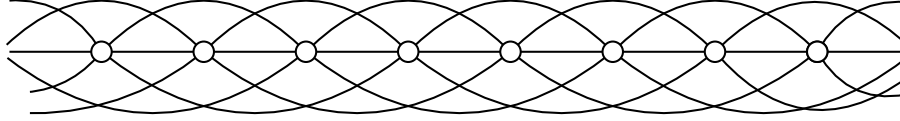


Рис. 1. Локальное строение графа $C_\infty(3)$

Данная статья продолжает изучение совершенных раскрасок графов $C_\infty(\tilde{n})$. В работе описаны все совершенные раскраски таких графов в k цветов для $k \geq 3n + 3$.

Первые результаты о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д. Б. Хорошиловой [1, 2]. Совершенные 2-раскраски графов $C_\infty(\tilde{n})$ и $C_\infty(1, 3, \dots, 2n-1)$ получены в [3] и [4] соответственно. В [5] описаны совершенные k -раскраски для графа $C_\infty(1, 2)$ и произвольного конечного k .

В [6] выдвинута гипотеза о том, что совершенные раскраски графов $C_\infty(\tilde{n})$ в произвольное количество цветов исчерпываются орбитными сериями и совершенными раскрасками с периодами $2n$, $2n + 1$ и $2n + 2$. Строгое определение орбитных серий будет дано позднее. В работе [7] получено множество совершенных раскрасок графов $C_\infty(\tilde{n})$ для $n = 3m + 1$ с периодами длины $4n + 2$, опровергающее гипотезу.

Пусть G – вершинно транзитивный граф. Произвольное множество его вершин T назовем *фрагментом*. Если для любой k -раскраски G найдется автоморфизм π такой, что сужение раскраски на $\pi(T)$ позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент – *k -тестовый*. Длину T определим равной его мощности. Верхние оценки на длины минимальных k -тестовых фрагментов графа $C_\infty(\tilde{n})$ для произвольных натуральных k и n получены в [8]. Там же найдена верхняя оценка и для общего случая – для бесконечного циркулянтного графа с дистанциями $d_1, d_2, \dots, d_n$ и произвольного конечного k .

1 Минимальный k -пестрый фрагмент графа $C_\infty(\tilde{n})$

Определим *k -пестрый* фрагмент графа G как подмножество вершин T , которое для любой совершенной k -раскраски ϕ может быть переведено в такое положение (с помощью автоморфизма графа G), в котором оно содержит вершины всех k цветов. Всюду далее в качестве k -пестрого фрагмента будем рассматривать множество вершин, номера которых образуют целочисленный отрезок. Не ограничивая общности, считаем, что это множество вида $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ для $l \in \mathbb{N}$. В дальнейшем будет

показано, что для достаточно больших k ($k \geq 3n+3$) минимальные фрагменты такого вида будут минимальными и в множестве всех фрагментов (см. теорему 1).

Известно (см. [2]), что любая совершенная раскраска графа $C_\infty(\tilde{n})$ является периодической. Значит, для ее описания достаточно указать наименьший период. Записывать такой период будем заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов которой равно длине периода. Для раскраски фрагмента $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ будем использовать строку цветов длины l в круглых скобках.

В лемме 1 сформулировано важное свойство минимального k -пестрого фрагмента бесконечного циркулянтного графа с дистанциями $d_1, d_2, \dots$ и d_n .

Лемма 1. (Л. 1 в [8]) В любой совершенной k -раскраске графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ цвета вершин v_1 и v_l минимального k -пестрого фрагмента $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ различны и в фрагменте $T' = \{v_2, v_3, \dots, v_{l-1}\}$ не встречаются.

Рассмотрим совершенную раскраску ϕ исследуемого графа в цвета из $I = \{1, 2, \dots, k\}$ и его минимальный k -пестрый фрагмент $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\phi(v_1) = 1$, а $\phi(v_l) = k$. Наша главная задача в этом параграфе – показать, что при $k \geq 3n+3$ выполняется $l = k$, т.е. все цвета в $\phi(T)$ различны.

Пусть $k \geq 3n+3$. Заметим, что $l \geq k \geq 3n+3$. *Левыми* назовем вершины от v_2 до v_{n+1} , *средними* – от v_{n+2} до v_{l-n-1} , а *правыми* – от v_{l-n} до v_{l-1} (см. рис. 2). Цвета левых, средних и правых вершин в ϕ будем также называть *левыми*, *средними* и *правыми*. Множества таких цветов обозначим L, M и R соответственно. А цвета, которые встречаются в $\phi(T)$ ровно один раз, назовем *уникальными*.

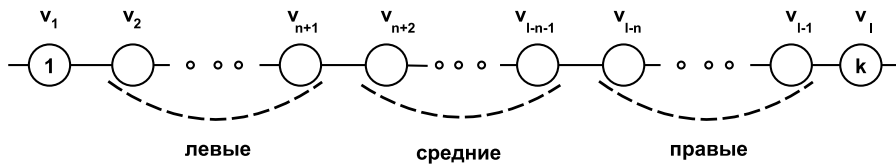


Рис. 2. Левые, средние и правые вершины k -пестрого фрагмента графа $C_\infty(\tilde{n})$

Множество цветов окружения вершины v цвета i в ϕ назовем *палитрой* цвета i и обозначим его $B_\phi(i)$.

В лемме 2 перечислены свойства сужений совершенных k -раскрасок на минимальный k -пестрый фрагмент для достаточно больших k ($k \geq 3n+3$).

Лемма 2. Если $k \geq 3n+3$, то для минимального k -пестрого фрагмента T графа $C_\infty(\tilde{n})$ и любой его совершенной k -раскраски ϕ верны следующие утверждения:

1. Множества L, M и R попарно не пересекаются.
2. Каждый средний цвет ϕ является уникальным.
3. $B_\phi(1)$ и $B_\phi(k)$ не содержат средних цветов.
4. Каждый цвет однозначно определяется множеством средних цветов в его палитре.

Доказательство. Справедливость пунктов 1 и 2 следует из лемм 4 и 5 в [8] соответственно. В подробном доказательстве нуждаются только пп. 3 и 4.

3. У вершин средних цветов нет 1- и k -окрашенных соседей. Из чего немедленно получаем утверждение пункта 3.

4. Рассмотрим вершину v_i с $1 < i \leq n+1$ левого цвета. В силу п. 3 данной леммы средними цветами могут быть окрашены только те ее соседи, которые находятся справа. Тогда: $B_\phi(\phi(v_i)) \cap M = \{\phi(v_{n+2}), \phi(v_{n+3}), \dots, \phi(v_{n+i})\}$. Рассуждая аналогично для правой вершины v_j ($l-n \leq j < l$), получим: $B_\phi(\phi(v_j)) \cap M = \{\phi(v_{j-n}), \phi(v_{j-n+1}), \dots, \phi(v_{l-n-1})\}$. По известной раскраске $\phi(T)$ можно определить палитру любого среднего цвета. Как следствие, однозначно определяется и пересечение палитры такого цвета с множеством M . Все такие пересечения различны согласно п. 2. Значит, каждое из них однозначно задаёт свой цвет. Что и требовалось доказать. $\square$

В теореме 1 описана раскраска минимального k -пестрого фрагмента в исследуемом графе при $k \geq 3n+3$.

Теорема 1. Пусть $k \geq 3n+3$, ϕ – произвольная совершенная k -раскраска графа $C_\infty(\tilde{n})$, а T – его минимальный k -пестрый фрагмент, тогда длина T равна k и $\phi(T) = (1 \ 2 \ \dots \ k)$.

Доказательство. В силу леммы 1 и п. 4 леммы 2 все вершины T окрашены уникальными цветами. Не теряя общности, можно считать, что $\phi(v_i) = i$ для всех i от 1 до k . Из чего получаем утверждение теоремы 1. $\square$

Следствие 1 позволяет точно восстановить левый (правый) цвет вершины, если известна мощность пересечения его палитры с множеством M .

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, b – некоторый цвет совершенной k -раскраски ϕ и $i > 0$. Если $|B_\phi(b) \cap M| = i$ и $b \in L$, то $b = i+1$; а если $|B_\phi(b) \cap M| = i$ и $b \in R$, то $b = k-i$.

2 Основной результат

Рассмотрим раскраски графа $C_\infty(\tilde{n})$ с периодами

$$S_{11}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2], \quad (1)$$

$$S_{12}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2], \quad (2)$$

$$S_{21}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2 \ 1], \quad (3)$$

$$S_{22}(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ (k-1) \ k \ k \ (k-1) \ \dots \ 3 \ 2 \ 1], \quad (4)$$

$$S(k) = [1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k]. \quad (5)$$

Первые четыре будем называть *зеркальными типами* 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 соответственно, а пятую – *циклической*. Тип зеркальной раскраски определяется количеством вершин крайних цветов (1 и k) в периоде.

Утверждение следующей леммы очевидно.

Лемма 3. *Раскраски циркулянтного графа $C_\infty(\tilde{n})$ с периодами $S_{11}(k)$, $S_{12}(k)$, $S_{21}(k)$, $S_{22}(k)$ и $S(k)$ являются совершенными для любых натуральных n и k ($n \geq 1, k \geq 1$).*

Циклические и зеркальные совершенные раскраски далее будем называть *орбитными*, поскольку они могут быть получены как результат применения орбитного метода, который является основным способом построения совершенных раскрасок графов (см., например, [9]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Совершенные k -раскраски графа $C_\infty(\tilde{n})$ для $k \geq 3n + 3$ исчерпываются раскрасками с периодами (1) – (5).*

Доказательство. Пусть ϕ – совершенная раскраска исследуемого графа в k цветов и $k \geq 3n + 3$. Согласно теореме 1 имеем $T = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ – его минимальный k -пестрый фрагмент и $\phi(T) = (1 \ 2 \ \dots \ k)$.

Доказательство проведем перебором допустимых значений $\phi(v_0)$ и $\phi(v_{k+1})$. В силу того, что $\phi(v_1) = 1$, и п. 3 леммы 2 получаем: v_0 имеет в своей 1-окрестности не более одной вершины среднего цвета. Тогда согласно п. 4 той же леммы v_0 окрашена одним из четырех цветов 1, 2, $(k-1)$ или k . Аналогичные рассуждения применимы к $\phi(v_{k+1})$. Для наглядности результаты перебора представлены с помощью таблицы (см. таблицу 1). В ее первых двух столбцах перечислены возможные продолжения раскраски фрагмента T влево и вправо на одну вершину. А в третьем столбце – период совершенной раскраски, до которой такое продолжение однозначно восстанавливается.

Случай $\phi(v_0) = 1$. Окружения вершин v_0 и v_1 цвета 1 отличаются вершинами v_{-n} и v_{n+1} . Значит, $\phi(v_{-n}) = \phi(v_{n+1}) = n + 1$. Палитра цвета $n + 1$ известна: $B_\phi(n + 1) = \{1, 2, \dots, n, n + 2, \dots, 2n, 2n + 1\}$. Половина ее цветов – левые, другая половина – средние. В силу п. 3 леммы 2 вершины $v_{-n}, v_{-n+1}, \dots, v_{-1}$ окрашены левыми цветами. Тогда $v_{-2n}, v_{-2n+1}, \dots, v_{-n-1}$ окрашены средними. Применим теперь к

ТАБЛИЦА 1. Схема доказательства Теоремы 2.

$\phi(v_0)$	$\phi(v_{k+1})$	Совершенная раскраска
1	$k-1$ k	$S_{21}(k)$ $S_{22}(k)$
2	$k-1$ k	$S_{11}(k)$ $S_{12}(k)$
$k-1$	—	—
k	1	$S(k)$

первым следствием 1 и получим продолжение $\phi(T)$ влево на n вершин: $(n \ (n-1) \ \dots \ 2 \ 1)$.

Далее рассмотрим допустимые продолжения $\phi(T)$ вправо на n вершин. Т.к. $\phi(v_k) = k$, то согласно п. 3 леммы 2 вершина v_{k+1} имеет не более одного соседа среднего цвета. Принимая во внимание то, что $k \notin B_\phi(1)$ и $k \notin B_\phi(2)$, вершина v_{k+1} окрашена либо цветом $(k-1)$, либо цветом k .

Рассмотрим подслучай $\phi(v_{k+1}) = k-1$. В силу п. 3 леммы 2 и того, что $(k-n-1) \in B_\phi(k-1) \cap M$, получим $\phi(v_{k+n+1}) = k-n-1$. Палитра этого цвета известна: $B_\phi(k-n-1) = \{k-2n-1, k-2n, \dots, k-n-2, k-n, \dots, k-2, k-1\}$. Учитывая п. 3 леммы 2, имеем: вершины $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+n}$ окрашены правыми цветами; а $v_{k+n+2}, v_{k+n+3}, \dots, v_{k+2n+1}$ — средними. Применим теперь к первым следствием 1 и получим продолжение $\phi(T)$ вправо на n вершин: $((k-1) \ (k-2) \ \dots \ (k-n+1) \ (k-n))$.

Рассуждения в подслучае $\phi(v_{k+1}) = k$ такие же, как для продолжения $\phi(T)$ влево вершиной цвета 1. Повторив их, восстановим раскраску ϕ на n вершинах справа от T : $(k \ (k-1) \ \dots \ (k-n+1))$.

Таким образом, получены продолжения $\phi(T)$ влево и вправо на n вершин, что позволяет восстановить палитру каждого цвета. С учетом известных палитр $\phi(T)$ однозначно продолжается до совершенной раскраски всего графа: в подслучае $\phi(v_{k+1}) = k-1$ период ϕ равен $S_{21}(k)$, а для $\phi(v_{k+1}) = k$ имеет вид $S_{22}(k)$.

Случай $\phi(v_0) = 2$ доказывается аналогично предыдущему (в силу симметрии). Допустимые продолжения здесь исчерпываются совершенными раскрасками с периодами $S_{11}(k)$ и $S_{12}(k)$.

Случай $\phi(v_0) = k-1$. Сравним палитры цвета $k-1$ у вершин v_0 и v_{k-1} . Для v_0 верно $\{1, 2, \dots, n\} \subset B_\phi(k-1)$; а для v_{k-1} : $\{(k-n-1), (k-n), \dots, (k-2), k\} \subset B_\phi(k-1)$. Мощность первого такого подмножества равна n , а второго — $(n+1)$. Из п. 1 леммы 2 следует, что они не пересекаются. Но тогда у вершины цвета $(k-1)$ не менее $2n+1$ соседей, что больше мощности 1-окрестности вершины исследуемого графа. Противоречие.

Случай $\phi(\mathbf{v}_0) = \mathbf{k}$. Сопоставим палитры цвета k у вершин v_0 и v_k . С учетом п. 1 леммы 2 получим $B_\phi(k) = \{1, 2, \dots, n, k-n, k-n+1, \dots, k-1\}$. В силу п. 3 той же леммы имеем: вершины $v_{-n}, v_{-n+1}, \dots, v_{-1}$ окрашены правыми цветами из $B_\phi(k)$ (т.е. цветами от $(k-n)$ до $(k-1)$). Согласно п. 4 леммы 2 в их палитре есть средние цвета. Значит, вершинам $v_{-2n}, v_{-2n+1}, \dots, v_{-n-1}$ соответствуют средние цвета. Применим теперь к вершинам $v_{-n+1}, v_{-n+2}, \dots, v_{-1}$ следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ влево на n вершин: $((k-n+1)(k-n+2) \dots (k-1)k)$. Повторив аналогичные шаги для вершин $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+n}$, получим также продолжение $\phi(T)$ вправо на n вершин: $(1\ 2 \dots n)$.

По продолжению $\phi(T)$ влево и вправо на n вершин совершенная раскраска всего графа восстанавливается однозначно, при этом ее период равен $[1\ 2 \dots k]$. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что совершенные раскраски графа $C_\infty(\tilde{n})$ с периодами $S_{12}(k)$ и $S_{21}(k)$ эквивалентны, поскольку вторая совпадает с первой после переобозначения цветов.

Заключение

С учетом результатов, полученных в данной работе, для завершения описания совершенных k -раскрасок графов $C_\infty(\tilde{n})$ осталось перечислить все их периоды для $2 < k \leq 3n + 2$.

Мы полагаем, что и для графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ существует оценка $K(d_n)$ такая, что его совершенные k -раскраски при $k \geq K(d_n)$ исчерпываются раскрасками с периодами (1) – (5).

References

- [1] D.B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89. Zbl 1249.05121
- [2] D.B. Khoroshilova, *On circular perfect two-color colorings*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92. Zbl 1249.05119
- [3] O.G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Ind. Math., **8**:3 (2014), 357–361. Zbl 1324.05064
- [4] O.G. Parshina, M.A. Lisitsyna, *The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances*, Sib. Electron. Math. Izv., **17** (2020), 590–603. Zbl 1440.05095
- [5] M.A. Lisitsyna, O.G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388. Zbl 1399.05079
- [6] O.G. Parshina, *Perfect k -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, in A. Makhnev (ed.) et al., *Groups and Graphs, Algorithms and Automata*, Int. Conf. PhD Summer Sch., Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015, 80.
- [7] V.D. Plaksina, P.A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances*, Sib. Electron. Mat. Izv., **18**:1 (2021), 530–533. Zbl 1462.05144
- [8] M.A. Lisitsyna, S.V. Avgustinovich, *Test fragments of perfect colorings of circulant graphs*, Sib. Electron. Mat. Izv., **20**:2 (2023), 638–645.

- [9] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs. Theory and applications*, J. A. Barth Verlag, Leipzig, 1995. Zbl 0824.05046

MARIYA ALEKSANDROVNA LISITSYNA
MOZHAIKY MILITARY SPACE ACADEMY,
ZHDANOVSKAYA, 13,
197198, ST PETERSBURG, RUSSIA
Email address: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

SERGEY VLADIMIROVICH AVGUSTINOVICH
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: avgust@math.nsc.ru