

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, № 2 стр. ??–?? (2023)

DOI 10.33048/semi.2023.20.xxx

УДК 519.174.7

MSC 05C50

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ В БОЛЬШОЕ ЧИСЛО ЦВЕТОВ

М.А. ЛИСИЦЫНА, С.В. АВГУСТИНОВИЧ

ABSTRACT. An infinite circulant graph with a continuous set of distances is a graph, whose set of vertices is the set of integers, and two vertices i and j are adjacent if $|i - j| \in \{1, 2, \dots, n\}$. We study perfect colorings of such graph with k colors for k at least $3n + 3$. A complete description of them is obtained.

Keywords: perfect coloring, infinite circulant graph, k -motley fragment.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный граф. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \dots, k\}$ будем называть *цветами*. Отображение $\phi : V \rightarrow I$ называется *совершенной k -раскраской*, если цветовой состав всякого шара радиуса 1 в G зависит только от цвета его центра.

Бесконечный циркулянтный граф с набором дистанций $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ – это граф Кэли бесконечной циклической группы \mathbb{Z} с системой образующих $\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Обозначается такой граф через $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Граф $C_\infty(\tilde{n}) \stackrel{\text{def}}{=} C_\infty(1, 2, \dots, n)$ называется *бесконечным циркулянтным графом со сплошным набором дистанций* (см. рис. 1). Всюду далее вершины таких графов будем обозначать v_i для $i \in \mathbb{Z}$.

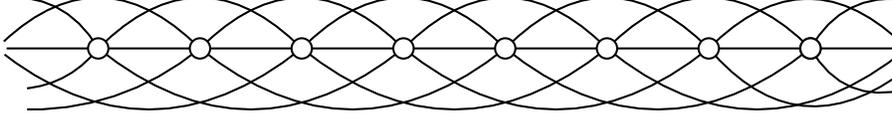
Данная статья продолжает изучение совершенных раскрасок графов $C_\infty(\tilde{n})$. В работе описаны все совершенные раскраски таких графов в k цветов для $k \geq 3n + 3$.

LISITSYNA, M.A., AVGUSTINOVICH, S.V., THE PERFECT COLORINGS OF CIRCULANT GRAPHS WITH A LARGE NUMBER OF COLORS.

© 2023 Лисицына М.А., Августинович С.В..

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

Поступила 24 ноября 2023 г., опубликована ?? декабря 2023 г.

Рис. 1. Локальное строение графа $C_\infty(3)$

Первые результаты о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д. Б. Хорошиловой [1, 2]. Совершенные 2-раскраски графов $C_\infty(\tilde{n})$ и $C_\infty(1, 3, \dots, 2n - 1)$ получены в [3] и [4] соответственно. В [5] описаны совершенные k -раскраски для графа $C_\infty(1, 2)$ и произвольного конечного k .

В [6] выдвинута гипотеза о том, что совершенные раскраски графов $C_\infty(\tilde{n})$ в произвольное количество цветов исчерпываются орбитными сериями и совершенными раскрасками с периодами $2n$, $2n + 1$ и $2n + 2$. Строгое определение орбитных серий будет дано позднее. В работе [7] получено множество совершенных раскрасок графов $C_\infty(\tilde{n})$ для $n = 3m + 1$ с периодами длины $4n + 2$, опровергающее гипотезу.

Пусть G – вершинно транзитивный граф. Произвольное множество его вершин T назовем *фрагментом*. Если для любой k -раскраски G найдется автоморфизм π такой, что сужение раскраски на $\pi(T)$ позволяет эту раскраску однозначно восстановить, то этот фрагмент – *k -тестовый*. *Длину T* определим равной его мощности. Верхние оценки на длины минимальных k -тестовых фрагментов графа $C_\infty(\tilde{n})$ для произвольных натуральных k и n получены в [8]. Там же найдена верхняя оценка и для общего случая – для бесконечного циркулянтного графа с дистанциями d_1, d_2, \dots, d_n и произвольного конечного k .

1. МИНИМАЛЬНЫЙ k -ПЕСТРЫЙ ФРАГМЕНТ ГРАФА $C_\infty(\tilde{n})$

Определим *k -пестрый* фрагмент графа G как подмножество вершин T , которое для любой совершенной k -раскраски ϕ может быть переведено в такое положение (с помощью автоморфизма графа G), в котором оно содержит вершины всех k цветов. Всюду далее в качестве k -пестрого фрагмента будем рассматривать множество вершин, номера которых образуют целочисленный отрезок. Не ограничивая общности, считаем, что это множество вида $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ для $l \in \mathbb{N}$. В дальнейшем будет показано, что для достаточно больших k ($k \geq 3n + 3$) минимальные фрагменты такого вида будут минимальными и в множестве всех фрагментов (см. теорему 1).

Известно (см. [2]), что любая совершенная раскраска графа $C_\infty(\tilde{n})$ является периодической. Значит, для ее описания достаточно указать наименьший период. Записывать такой период будем заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов которой равно длине периода. Для раскраски фрагмента $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ будем использовать строку цветов длины l в круглых скобках.

В лемме 1 сформулировано важное свойство минимального k -пестрого фрагмента бесконечного циркулянтного графа с дистанциями d_1, d_2, \dots и d_n .

Лемма 1. (Л. 1 в [8]) В любой совершенной k -раскраске графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ цвета вершин v_1 и v_l минимального k -пестрого фрагмента $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ различны и в фрагменте $T' = \{v_2, v_3, \dots, v_{l-1}\}$ не встречаются.

Рассмотрим совершенную раскраску ϕ исследуемого графа в цвета из $I = \{1, 2, \dots, k\}$ и его минимальный k -пестрый фрагмент $T = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\phi(v_1) = 1$, а $\phi(v_l) = k$. Наша главная задача в этом параграфе – показать, что при $k \geq 3n + 3$ выполняется $l = k$, т.е. все цвета в $\phi(T)$ различны.

Пусть $k \geq 3n + 3$. Заметим, что $l \geq k \geq 3n + 3$. *Левыми* назовем вершины от v_2 до v_{n+1} , *средними* – от v_{n+2} до v_{l-n-1} , а *правыми* – от v_{l-n} до v_{l-1} (см. рис. 2). Цвета левых, средних и правых вершин в ϕ будем также называть *левыми*, *средними* и *правыми*. Множества таких цветов обозначим L, M и R соответственно. А цвета, которые встречаются в $\phi(T)$ ровно один раз, и назовем *уникальными*.

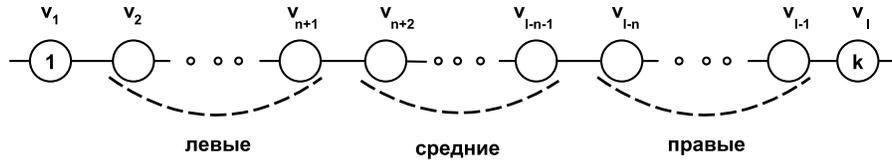


Рис. 2. Левые, средние и правые вершины k -пестрого фрагмента графа $C_\infty(\tilde{n})$

Множество цветов окружения вершины v цвета i в ϕ назовем *палитрой* цвета i и обозначим его $B_\phi(i)$.

В лемме 2 перечислены свойства сужений совершенных k -раскрасок на минимальный k -пестрый фрагмент для достаточно больших k ($k \geq 3n + 3$).

Лемма 2. Если $k \geq 3n + 3$, то для минимального k -пестрого фрагмента T графа $C_\infty(\tilde{n})$ и любой его совершенной k -раскраски ϕ верны следующие утверждения:

1. Множества L, M и R попарно не пересекаются.
2. Каждый средний цвет ϕ является уникальным.
3. $B_\phi(1)$ и $B_\phi(k)$ не содержат средних цветов.
4. Каждый цвет однозначно определяется множеством средних цветов в его палитре.

Доказательство. Справедливость пунктов 1 и 2 следует из лемм 4 и 5 в [8] соответственно. В подробном доказательстве нуждаются только пп. 3 и 4.

3. У вершин средних цветов нет 1- и k -окрашенных соседей. Из чего немедленно получаем утверждение пункта 3.

4. Рассмотрим вершину v_i с $1 < i \leq n + 1$ левого цвета. В силу п. 3 данной леммы средними цветами могут быть окрашены только те ее соседи, которые находятся справа. Тогда: $B_\phi(\phi(v_i)) \cap M = \{\phi(v_{n+2}), \phi(v_{n+3}), \dots, \phi(v_{n+i})\}$. Рассуждая аналогично для правой вершины v_j ($l - n \leq j < l$), получим: $B_\phi(\phi(v_j)) \cap M = \{\phi(v_{j-n}), \phi(v_{j-n+1}), \dots, \phi(v_{l-n-1})\}$. По известной раскраске

$\phi(T)$ можно определить палитру любого среднего цвета. Как следствие, однозначно определяется и пересечение палитры такого цвета с множеством M . Все такие пересечения различны согласно п. 2. Значит, каждое из них однозначно задаёт свой цвет. Что и требовалось доказать. \square

В теореме 1 описана раскраска минимального k -пестрого фрагмента в исследуемом графе при $k \geq 3n + 3$.

Теорема 1. Пусть $k \geq 3n + 3$, ϕ – произвольная совершенная k -раскраска графа $C_\infty(\tilde{n})$, а T – его минимальный k -пестрый фрагмент, тогда длина T равна k и $\phi(T) = (1\ 2 \dots k)$.

Доказательство. В силу леммы 1 и п. 4 леммы 2 все вершины T окрашены уникальными цветами. Не теряя общности, можно считать, что $\phi(v_i) = i$ для всех i от 1 до k . Из чего получаем утверждение теоремы 1. \square

Следствие 1 позволяет точно восстановить левый (правый) цвет вершины, если известна мощность пересечения его палитры с множеством M .

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, b – некоторый цвет совершенной k -раскраски ϕ и $i > 0$. Если $|B_\phi(b) \cap M| = i$ и $b \in L$, то $b = i + 1$; а если $|B_\phi(b) \cap M| = i$ и $b \in R$, то $b = k - i$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим раскраски графа $C_\infty(\tilde{n})$ с периодами

- (1) $S_{11}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ (k-1) \dots 3\ 2],$
- (2) $S_{12}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ k\ (k-1) \dots 3\ 2],$
- (3) $S_{21}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ (k-1) \dots 3\ 2\ 1],$
- (4) $S_{22}(k) = [1\ 2\ 3 \dots (k-1)\ k\ k\ (k-1) \dots 3\ 2\ 1],$
- (5) $S(k) = [1\ 2\ 3 \dots k].$

Первые четыре будем называть *зеркальными типом* 1-1, 1-2, 2-1 и 2-2 соответственно, а пятую – *циклической*. Тип зеркальной раскраски определяется количеством вершин крайних цветов (1 и k) в периоде.

Утверждение следующей леммы очевидно.

Лемма 3. Раскраски циркулянтного графа $C_\infty(\tilde{n})$ с периодами $S_{11}(k)$, $S_{12}(k)$, $S_{21}(k)$, $S_{22}(k)$ и $S(k)$ являются совершенными для любых натуральных n и k ($n \geq 1, k \geq 1$).

Циклические и зеркальные совершенные раскраски далее будем называть *орбитными*, поскольку они могут быть получены как результат применения орбитного метода, который является основным способом построения совершенных раскрасок графов (см., например, [9]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Совершенные k -раскраски графа $C_\infty(\tilde{n})$ для $k \geq 3n + 3$ исчерпываются раскрасками с периодами (1) – (5).

Доказательство. Пусть ϕ – совершенная раскраска исследуемого графа в k цветов и $k \geq 3n + 3$. Согласно теореме 1 имеем $T = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ – его минимальный k -пестрый фрагмент и $\phi(T) = (1\ 2 \dots k)$.

Доказательство проведем перебором допустимых значений $\phi(v_0)$ и $\phi(v_{k+1})$. В силу того, что $\phi(v_1) = 1$, и п. 3 леммы 2 получаем: v_0 имеет в своей 1-окрестности не более одной вершины среднего цвета. Тогда согласно п. 4 той же леммы v_0 окрашена одним из четырех цветов 1, 2, $(k - 1)$ или k . Аналогичные рассуждения применимы к $\phi(v_{k+1})$. Для наглядности результаты перебора представлены с помощью таблицы (см. таблицу 1). В ее первых двух столбцах перечислены возможные продолжения раскраски фрагмента T влево и вправо на одну вершину. А в третьем столбце – период совершенной раскраски, до которой такое продолжение однозначно восстанавливается.

ТАБЛИЦА 1. Схема доказательства Теоремы 2.

$\phi(v_0)$	$\phi(v_{k+1})$	Совершенная раскраска
1	$k - 1$	$S_{21}(k)$
	k	$S_{22}(k)$
2	$k - 1$	$S_{11}(k)$
	k	$S_{12}(k)$
$k - 1$	–	–
k	1	$S(k)$

Случай $\phi(v_0) = 1$. Окружения вершин v_0 и v_1 цвета 1 отличаются вершинами v_{-n} и v_{n+1} . Значит, $\phi(v_{-n}) = \phi(v_{n+1}) = n + 1$. Палитра цвета $n + 1$ известна: $B_\phi(n + 1) = \{1, 2, \dots, n, n + 2, \dots, 2n, 2n + 1\}$. Половина ее цветов – левые, другая половина – средние. В силу п. 3 леммы 2 вершины $v_{-n}, v_{-n+1}, \dots, v_{-1}$ окрашены левыми цветами. Тогда $v_{-2n}, v_{-2n+1}, \dots, v_{-n-1}$ окрашены средними. Применим теперь к первым следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ влево на n вершин: $(n (n - 1) \dots 2 1)$.

Далее рассмотрим допустимые продолжения $\phi(T)$ вправо на n вершин. Т.к. $\phi(v_k) = k$, то согласно п. 3 леммы 2 вершина v_{k+1} имеет не более одного соседа среднего цвета. Принимая во внимание то, что $k \notin B_\phi(1)$ и $k \notin B_\phi(2)$, вершина v_{k+1} окрашена либо цветом $(k - 1)$, либо цветом k .

Рассмотрим подслучай $\phi(v_{k+1}) = k - 1$. В силу п. 3 леммы 2 и того, что $(k - n - 1) \in B_\phi(k - 1) \cap M$, получим $\phi(v_{k+n+1}) = k - n - 1$. Палитра этого цвета известна: $B_\phi(k - n - 1) = \{k - 2n - 1, k - 2n, \dots, k - n - 2, k - n, \dots, k - 2, k - 1\}$. Учитывая п. 3 леммы 2, имеем: вершины $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+n}$ окрашены правыми цветами; а $v_{k+n+2}, v_{k+n+3}, \dots, v_{k+2n+1}$ – средними. Применим теперь к первым следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ вправо на n вершин: $((k - 1) (k - 2) \dots (k - n + 1) (k - n))$.

Рассуждения в подслучае $\phi(v_{k+1}) = k$ такие же, как для продолжения $\phi(T)$ влево вершиной цвета 1. Повторив их, восстановим раскраску ϕ на n вершинах справа от T : $(k (k - 1) \dots (k - n + 1))$.

Таким образом, получены продолжения $\phi(T)$ влево и вправо на n вершин, что позволяет восстановить палитру каждого цвета. С учетом известных палитр $\phi(T)$ однозначно продолжается до совершенной раскраски всего графа: в подслучае $\phi(v_{k+1}) = k - 1$ период ϕ равен $S_{21}(k)$, а для $\phi(v_{k+1}) = k$ имеет вид $S_{22}(k)$.

Случай $\phi(\mathbf{v}_0) = \mathbf{2}$ доказывается аналогично предыдущему (в силу симметрии). Допустимые продолжения здесь исчерпываются совершенными раскрасками с периодами $S_{11}(k)$ и $S_{12}(k)$.

Случай $\phi(\mathbf{v}_0) = \mathbf{k} - \mathbf{1}$. Сравним палитры цвета $k - 1$ у вершин v_0 и v_{k-1} . Для v_0 верно $\{1, 2, \dots, n\} \subset B_\phi(k-1)$; а для v_{k-1} : $\{(k-n-1), (k-n), \dots, (k-2), k\} \subset B_\phi(k-1)$. Мощность первого такого подмножества равна n , а второго — $(n+1)$. Из п. 1 леммы 2 следует, что они не пересекаются. Но тогда у вершины цвета $(k-1)$ не менее $2n+1$ соседей, что больше мощности 1-окрестности вершины исследуемого графа. Противоречие.

Случай $\phi(\mathbf{v}_0) = \mathbf{k}$. Сопоставим палитры цвета k у вершин v_0 и v_k . С учетом п. 1 леммы 2 получим $B_\phi(k) = \{1, 2, \dots, n, k-n, k-n+1, \dots, k-1\}$. В силу п. 3 той же леммы имеем: вершины $v_{-n}, v_{-n+1}, \dots, v_{-1}$ окрашены правыми цветами из $B_\phi(k)$ (т.е. цветами от $(k-n)$ до $(k-1)$). Согласно п. 4 леммы 2 в их палитре есть средние цвета. Значит, вершинам $v_{-2n}, v_{-2n+1}, \dots, v_{-n-1}$ соответствуют средние цвета. Применим теперь к вершинам $v_{-n+1}, v_{-n+2}, \dots, v_{-1}$ следствие 1 и получим продолжение $\phi(T)$ влево на n вершин: $((k-n+1) (k-n+2) \dots (k-1) k)$. Повторив аналогичные шаги для вершин $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{k+n}$, получим также продолжение $\phi(T)$ вправо на n вершин: $(1 2 \dots n)$.

По продолжению $\phi(T)$ влево и вправо на n вершин совершенная раскраска всего графа восстанавливается однозначно, при этом ее период равен $[1 2 \dots k]$. Теорема доказана. \square

Заметим, что совершенные раскраски графа $C_\infty(\tilde{n})$ с периодами $S_{12}(k)$ и $S_{21}(k)$ эквивалентны, поскольку вторая совпадает с первой после переобозначения цветов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С учетом результатов, полученных в данной работе, для завершения описания совершенных k -раскрасок графов $C_\infty(\tilde{n})$ осталось перечислить все их периоды для $2 < k \leq 3n + 2$.

Мы полагаем, что и для графа $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ существует оценка $K(d_n)$ такая, что его совершенные k -раскраски при $k \geq K(d_n)$ исчерпываются раскрасками с периодами (1) – (5).

REFERENCES

- [1] D. B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89.
- [2] D. B. Khoroshilova, *On two-color perfect colorings of circular graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92.
- [3] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Industr. Math., **8**:3 (2014), 357–361.
- [4] O. G. Parshina, M. A. Lisitsyna, *The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances*, Sib. Electron. Math. Rep., **17** (2020), 590–603.
- [5] M. A. Lisitsyna, O. G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388.
- [6] O. G. Parshina, *Perfect k -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, Abs. Int. Conf. PhD Summer Sch. "Groups and Graphs, Algorithms and Automata Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015, 80.

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ В БОЛЬШОЕ ЧИСЛО ЦВЕТОВ

- [7] V. D. Plaksina, P. A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:1 (2021), 530–533.
- [8] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, *Test fragments of perfect colorings of circulant graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**:2 (2023), 638–645.
- [9] D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application*, VEB Dtsch. Verl. Wiss., Berlin (1982).

MARIYA ALEKSANDROVNA LISITSYNA
MOZHAIKY MILITARY SPACE ACADEMY,
ZHDANOVSKAYA, 13,
197198, ST PETERSBURG, RUSSIA
Email address: lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com

SERGEY VLADIMIROVICH AVGUSTINOVICH
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: avgust@math.nsc.ru