

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 12, стр. 144–144 (2015)*

УДК

512.552

DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx

MSC

16P10

КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА С АЦИКЛИЧЕСКИМИ  
СЖАТЫМИ ГРАФАМИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

А.С. МОНАСТЫРЕВА

АБСТРАКТ. We describe all associative finite rings that have acyclic compressed zero-divisor graphs.

**Keywords:** associative ring, finite ring, zero-divisor graph, compressed zero-divisor graph.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Пусть  $R$  – произвольное кольцо. Для каждого элемента  $x \in R$  положим  $l(x) = \{a \in R; ax = 0\}$  и  $r(x) = \{a \in R; xa = 0\}$ . Пусть  $D(R)$  – множество делителей нуля (односторонних и двусторонних) кольца  $R$  и  $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$ . Обозначим  $\text{Ann}(R) = \{a \in R; aR = Ra = (0)\}$ . Через  $J(R)$  обозначим *радикал Джекобсона*

---

MONASTYREVA, A.S., FINITE RINGS WITH ACYCLIC ZERO-DIVISOR GRAPHS

© 2024 МОНАСТЫРЕВА А.С..

Поступила 1 января 2014 г., опубликована 31 декабря 2014 г.

кольца  $R$ . Конечное кольцо  $R$  с единицей называется *локальным*, если фактор-кольцо  $R/J(R)$  является полем [1].

*Графом делителей нуля*  $\Gamma(R)$  кольца  $R$  называют граф, вершинами которого являются ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем различные две вершины  $x, y$  соединяются ребром тогда и только тогда, когда  $xy = 0$  или  $yx = 0$ .

Понятие графа делителей нуля для коммутативного кольца было введено Д. Андерсоном, П. Ливингстоном в работе [1]. Позже в работе [2] это понятие было обобщено для некоммутативного кольца (определение графа делителей нуля именно из этой работы мы и сформулировали выше). В частности, С. Редмонд доказал, что граф делителей нуля ассоциативного кольца является связным и его диаметр не превосходит трех.

С 1999 года вышел ряд работ, посвященных графам делителей нуля ассоциативных колец. Однако скоро стало понятным, что изображение графа делителей нуля даже для колец небольших порядков часто является сложным, а для больших порядков почти невозможным. Возникла необходимость разбить множество вершин графа делителей нуля на классы, причем так, чтобы не нарушалось представление о строении графа делителей нуля в целом. В работах [3, 4] предложили довольно естественный способ решения этой проблемы для коммутативного случая. В статье [5] этот подход был обобщен на некоммутативный случай. Изложим суть этого метода. Введем отношение эквивалентности на множестве  $D(R)^*$  следующим образом:

$$\text{для любых } x, y \in D(R)^* \quad x \sim y \Leftrightarrow l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y).$$

Обозначим через  $[x]$  класс эквивалентности элемента  $x \in D(R)^*$ . Для любых  $a \in [x], b \in [y]$ , где  $x, y \in D(R)^*$ , очевидно, что  $ab = 0$  или  $ba = 0$  тогда и только тогда, когда  $xy = 0$  или  $yx = 0$ . Обозначим через  $\Gamma_{\sim}(R)$  граф, множеством вершин которого является множество  $\{[x]; x \in D(R)^*\}$ , причем две вершины  $[x], [y]$  (не обязательно различные) будем соединять ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда  $xy = 0$  или  $yx = 0$ . Граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  будем называть *сжатым графом делителей нуля* кольца  $R$ .

В работе [5] был доказан следующий факт:

**Предложение 1.1** (см. [5]). *Пусть  $R$  – произвольное кольцо и  $x \in D(R)^*$ . Если  $x^2 = 0$ , то  $yz = 0$  или  $zy = 0$  для любых  $y, z \in [x]$ ; если же  $x^2 \neq 0$ , то  $yz \neq 0$  и  $zy \neq 0$  для любых  $y, z \in [x]$ .*

Из предложения 1.1 следует, что в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  все вершины делятся на два типа. Если  $x^2 = 0$ , то  $[x]$  – это вершина с петлей. Если

$x^2 \neq 0$ , то  $[x]$  – это вершина без петли. Зная, сколько элементов содержится в каждом классе  $[x]$ , мы всегда от сжатого графа делителей нуля можем перейти к обычному графу делителей нуля. Ясно, что сжатый граф делителей нуля конечного ассоциативного кольца также связан и его диаметр не больше трех. Кроме того, в сжатом графе нильпотентные элементы индекса нильпотентности два выделены петлей. Отметим, что не всякий связный граф может являться сжатым графом делителей нуля для какого-нибудь кольца. Например, если взять отрезок  $[a] - [b]$ , где обе вершины имеют петли, то он не является сжатым графом делителей нуля никакого кольца, поскольку вершины  $[a]$  и  $[b]$  на самом деле можно стянуть в одну вершину с петлей. И таких примеров много, причем не всегда причина в том, что граф не до конца сжат. В работе [5] описаны все связные графы делителей нуля (с петлями) на одной, двух и трех вершинах, которые являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного кольца. В статье [6] полностью описаны все связные графы с петлями на четырех вершинах, которые могут реализованы как сжатые графы делителей нуля конечных колец. Из 50 неизоморфных связных графов с петлями на четырех вершинах только 8, как оказалось, являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного кольца (см. [6]). Описаны полностью конечные кольца, сжатые графы делителей нуля содержат мост, вершины которого не являются висячими [7]. В работах [7, 8] получено описание конечных колец, сжатые графы делителей нуля которых являются полными (с петлями). В [10, 11] описаны сжатые графы делителей нуля всех коммутативных конечных локальных колец  $R$  характеристики  $p$  с радикалом Джекобсона  $J$ , таким, что  $J^4 = (0)$ ,  $F = R/J \cong GF(p^r)$  и  $\dim_F J/J^2 = 2$ ,  $\dim_F J^2/J^3 = 2$ ,  $\dim_F J^3 = 1$  or  $\dim_F J/J^2 = 3$ ,  $\dim_F J^2/J^3 = 1$ ,  $\dim_F J^3 = 1$ .

В настоящей работе мы полностью описываем конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых не содержат циклов, то есть являются *ациклическими*. Подчеркнем, что петли мы не рассматриваем как циклы. Поскольку граф делителей нуля ассоциативного кольца является связным, то фактически мы описываем конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых являются *деревьями*.

Нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Пусть аддитивная группа кольца  $R$  разлагается в прямую сумму своих аддитивных подгрупп  $A_i$ , где  $i = 1, \dots, n$  и  $n \geq 2$ , т.е.

$R = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_n$ . Если все подгруппы  $A_i$  являются двусторонними идеалами кольца  $R$ , то кольцо  $R$  называют *разложимым* и пишут  $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ . Аддитивную подгруппу аддитивной группы кольца  $R$ , порожденную элементом  $x \in R$ , будем обозначать  $\langle x \rangle$ .

Элемент  $e \in R$  называется *идемпотентом* кольца  $R$ , если  $e = e^2$ . Система ненулевых идемпотентов  $e_1, \dots, e_k$  ( $k \geq 2$ ) кольца  $R$  называется *ортогональной*, если  $e_i e_j = e_j e_i = 0$  для любой пары различных чисел  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Далее, пусть  $R$  – произвольное кольцо (возможно, без единицы) и  $e$  – нетривиальный идемпотент кольца  $R$ , т.е. идемпотент, отличный от единицы (если она существует) и нуля. Обозначим

$$eRe = \{ere; r \in R\}, \quad eR(1-e) = \{er - ere; r \in R\},$$

$$(1-e)Re = \{re - ere; r \in R\}, \quad (1-e)R(1-e) = \{r - re - er + ere; r \in R\}.$$

Тогда для аддитивной группы кольца  $R$  имеет место следующее разложение, называемое *двусторонним пирсовским разложением* (см. [9, С. 32]):

$$R = eRe \dot{+} eR(1-e) \dot{+} (1-e)Re \dot{+} (1-e)R(1-e).$$

В кольце без единицы под записью  $ex(1-e)$  мы будем понимать элемент  $ex - exe$ , аналогично  $(1-e)xe = xe - exe$  и  $(1-e)x(1-e) = x - ex - xe + exe$  для любого идемпотента  $e \in R$  и для любого элемента  $x \in R$ .

Для любого подмножества  $S$  кольца  $R$  будем полагать  $S^* = S \setminus \{0\}$ . Обозначим также  $l(S) = \{a \in R; aS = (0)\}$  и  $r(S) = \{a \in R; Sa = (0)\}$ .

## 2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В следующей теореме сформулирован основной результат этой статьи. Отметим, что для каждого случая в скобках мы указали, какой сжатый граф делителей нуля имеет данный тип кольца.

**Теорема 1.** Пусть  $R$  – конечное кольцо. Сжатый граф делителей нуля кольца  $R$  является ациклическим тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (1)  $R$  является конечным полем ( $\Gamma_{\sim}(R)$  является пустым графом);
- (2)  $R$  – это локальное или нильпотентное кольцо,  $J(R) \neq (0)$  и  $J(R)^2 = (0)$  ( $\Gamma_{\sim}(R)$  состоит из одной вершины петлей);
- (3)  $R \cong GF(q) \oplus S$ , где  $S$  – локальное кольцо,  $J(S)^2 = (0)$  и  $J(S) \neq (0)$  (граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  представляет из себя цепь из четырех вершин  $[c] - [a] - [b] - [d]$ , где только вершина  $[b]$  имеет петлю).

- (4)  $R$  – прямая сумма двух конечных полей (в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  всего две вершины и обе вершины без петли).
- (5)  $R$  – локальное кольцо либо нильпотентное,  $J(R) \neq l(J(R)) \cup r((R))$ , причем  $xy \neq 0$  для всех элементов  $x, y \notin l(J(R)) \cup r(J(R))$  (в графе всего две вершины: одна вершина с петлей, а вторая – без петли).
- (6)  $R$  – ненильпотентное кольцо без единицы,  $R = A \oplus B$ , где  $B^2 = (0)$  (возможно,  $B$  является нулевым),  $A$  – ненулевое подкольцо кольца  $R$ ,  $e = e^2 \in A$ ,  $\bar{e}$  является единицей в фактор-кольце  $A/J(A)$ ,  $A = eAe + eA(1-e) + (1-e)Ae + (1-e)A(1-e)$ ,  $eAe \cong GF(p^n)$  ( $p$  – простое число и  $n \geq 1$ ),  $eA(1-e) \subseteq l(A)$ ,  $(1-e)Ae \subseteq r(A)$ ,  $(1-e)A(1-e) = \text{Ann}(A)$  (граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  состоит из двух вершин  $[b]$  и  $[e]$ , причем  $[b]$  имеет петлю, а  $[e]$  – без петли).
- (7) кольцо  $R$  является локальным или нильпотентным,  $J(R)^3 = (0)$ ,  $J(R)^2 \neq (0)$ ,  $x^2 = 0$  для всех  $x \in J(R)$  и

$$ax = ay = 0 \Leftrightarrow a \in \text{Ann}(J(R)) \quad (1)$$

для всех  $a, x, y \in J(R)$ , таких, что  $xy \neq 0$  (условие (1) лишнее, если в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  менее 6 вершин) (граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  – звезда типа I).

- (8)  $R$  является локальным или нильпотентным кольцом, причем выполняются два условия:
- (а) для всех  $a, x, y \in J(R)$ , таких, что  $xy \neq 0$ ,  $x \neq y$ ,  $x, y \in l(a) \cup r(a) \Leftrightarrow az = 0$  или  $za = 0$  для любого  $z \in J(R)$ ;
- (б) в  $J(R)$  существуют элементы  $z, t$ , такие, что  $z^2 \neq 0$ ,  $t^2 = 0$ ,  $zt \neq 0$  и  $tz \neq 0$  (граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  – звезда типа II).
- (9)  $R$  – ненильпотентное кольцо без единицы,  $e^2 = e \in R$ ,  $\bar{e}$  – единица в фактор-кольце  $R/J(R)$ , которое является полем,  $J(R)^2 = (0)$ ,  $J(eRe) \neq (0)$  (в  $\Gamma_{\sim}(R)$  три вершины:  $[b]$ ,  $[d]$ ,  $[a_1]$ ).

*Доказательство.* Пусть  $R$  – конечное кольцо, такое что в его сжатом графе делителей нуля  $\Gamma_{\sim}(R)$  нет циклов. Если граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является пустым, то в кольце  $R$  нет делителей нуля и оно является полем. Конечные кольца, у которых сжатый граф делителей нуля состоит из одной вершины, описаны в [5]: это кольца из пункта (2) настоящей теоремы. Будем далее считать, что в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  две или более вершины.

Известно, что диаметр графа делителей нуля  $\Gamma(R)$  не превосходит 3 [2]. Следовательно, диаметр и сжатого графа делителей нуля

не превосходит трех. Поэтому в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  цепь может быть максимум длины 3. Пусть в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  существует цепь длины три:  $[c] - [a] - [b] - [d]$ . Множество вершин графа  $\Gamma_{\sim}(R)$ , смежных с  $[a]$ , но не смежных с  $[b]$ , обозначим через  $A$ . Множество вершин, смежных с  $[b]$ , но не смежных с  $[a]$ , — через  $B$ . В частности,  $[c] \in A$ ,  $[d] \in B$  (напомним, в графе нет циклов). Поскольку в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  нет циклов и его диаметр не превосходит трех, то вершины из множеств  $A$  и  $B$  являются висячими и в  $\Gamma_{\sim}(R)$  нет других вершин, кроме  $[a]$ ,  $[b]$  и элементов множеств  $A$  и  $B$ . Таким образом, граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  содержит мост  $[a] - [b]$ , причем вершины моста  $[a] - [b]$  не являются висячими. Кольца с такими графами полностью описаны в работе [7]:  $|A| = 1$ ,  $|B| = 1$ ,  $R \cong GF(q) \oplus S$ , где  $S$  — локальное кольцо, причем  $J(S)^2 = (0)$ ,  $J(S) \neq (0)$  и граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  представляет из себя цепь  $[c] - [a] - [b] - [d]$ , где только вершина  $[b]$  имеет петлю (это кольца типа (3) из формулировки теоремы).

Рассмотрим теперь случай, когда в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  не существует цепи длины 3. Тогда этот граф является звездой, причем среди висячих вершин только одна может быть без петли, поскольку в звезде висячие вершины без петель можно объединить в одну. Если вершин всего две, то граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  представляет из себя отрезок и, в частности, является полным графом. Кольца с полными сжатыми графами полностью описаны ранее (см. [8, 7]). Это кольца (4), (5), (6) из формулировки настоящей теоремы.

Теперь можем считать, что граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой и содержит более двух вершин, то есть не является отрезком. Докажем, что центральная вершина звезды всегда имеет петлю. В работе [5] описаны все сжатые графы делителей нуля конечных колец, которые имеют ровно три вершины. Ациклическим является только один граф на трех вершинах: он представляет из себя цепь длины два:  $[a] - [b] - [c]$ , в которой вершина  $[a]$  не имеет петли, а вершины  $[b]$  и  $[c]$  — с петлями (см. [5, Theorem 3]). Если же в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  более трех вершин, то в нем есть по крайней мере две висячие вершины с петлями. Это означает, что центральная вершина звезды  $\Gamma_{\sim}(R)$  имеет петлю (см. [6, Lemma 2.2]). Таким образом, если граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой и содержит более двух вершин, то его центральная вершина всегда имеет петлю, причем среди висячих вершин ровно одна может не иметь петлю. Если в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  все вершины с петлями, то будем говорить, что он является *звездой типа I*, а если в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  есть одна висячая вершина без петли, то будем говорить, что граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является *звездой типа II* (в обоих случаях подразумевается, что вершин более двух). Кроме

того, будем использовать следующие обозначения для вершин графа  $\Gamma_{\sim}(R)$ :  $[b]$  – центральная вершина звезды (она всегда с петлей),  $[d]$  – вершина без петли (ее может не быть),  $[a_1], [a_2], \dots, [a_n]$  – все остальные вершины (и они все с петлями), причем в звезде типа I  $n \geq 3$ , а в звезде типа II  $n \geq 1$ .

В следующей лемме описывается ряд свойств кольца, у которого сжатый граф делителей нуля является звездой типа I или типа II.

**Лемма 1.** Пусть  $R$  – конечное кольцо, у которого граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой типа I или типа II, и  $1 \leq i, j \leq n$ . Тогда выполняются следующие условия:

- (1)  $s_1 s_2 = s_2 s_1 = 0$  для всех  $s_1, s_2 \in [a_i]$  и для любого  $i$ ;
- (2)  $a_i b = b a_i = 0$  для всех  $i$ ;
- (3)  $b_1 b_2 = b_2 b_1 = 0$  для всех  $b_1, b_2 \in [b]$ ;
- (4)  $a_i a_j \in [b]$  для любой пары различных чисел  $i, j$ ;
- (5)  $db, bd \in [b] \cup \{0\}$ ;
- (6)  $d^4 = 0$ , если элемент  $d$  является нильпотентным.

*Доказательство.* Пусть  $R$  – конечное кольцо, причем граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой типа I или типа II.

(1) Возьмем произвольные элементы  $s_1, s_2 \in [a_i]$  для некоторого числа  $i \leq n$ . Тогда  $(s_1 + s_2)s_1 = 0$  или  $s_1(s_1 + s_2) = 0$ . Если  $s_1 + s_2 = 0$ , то  $s_1 s_2 = -s_1^2 = 0 = s_2 s_1$ . Если  $s_1 + s_2 \in D(R)^*$ , то  $s_1 + s_2 \in [a_1] \cup [b]$ . Следовательно,  $(s_1 + s_2)^2 = 0$ . Поскольку  $s_1^2 = s_2^2 = 0$ , а также  $s_1 s_2 = 0$  или  $s_2 s_1 = 0$ , то и в этом случае  $s_1 s_2 = s_2 s_1 = 0$ .

(2) Предположим, что  $a_1 b = 0$ , но  $b a_1 \neq 0$ . Тогда  $a_1(a_1 + b) = 0$ , то есть  $a_1 + b$  является ненулевым делителем нуля, причем  $a_1 + b \in [b] \cup [a_1]$ . Это означает, что  $(a_1 + b)^2 = 0$ , то есть  $b a_1 = 0$ ; противоречие. Поэтому наше предположение было неверным и  $a_1 b = b a_1 = 0$ .

(3) Пусть  $b_1 b_2 \in [b]$ . Тогда  $b_1(b_1 + b_2) = 0$  или  $(b_1 + b_2)b_1 = 0$ . Если  $b_1 + b_2 = 0$ , то утверждение очевидно. Пусть  $b_1 + b_2 \in D(R)^*$ . Тогда  $(b_1 + b_2)a_i = 0$  для любого  $i$  (см. утверждение (2) настоящей леммы). Значит,  $b_1 + b_2 \in [b]$  или  $b_1 + b_2 \in [a_1]$  (второй случай может быть, если в звезде типа II всего одна висючая вершина). Поэтому  $(b_1 + b_2)^2 = 0$ . Следовательно,  $b_1 b_2 = b_2 b_1 = 0$  и в этом случае.

(4) Поскольку  $a_i a_j \neq 0$  при различных  $i, j$  и элемент  $a_i a_j$  аннулирует элементы  $a_i$  и  $a_j$  одновременно, то  $a_i a_j \in [b]$ .

(5) Предположим, что  $db = 0$  и  $bd \neq 0$ . Тогда  $d(bd) = 0$ , то есть  $[bd] = [b]$ .

(6) Пусть  $d^n = 0$ ,  $d^{n-1} \neq 0$ ,  $n > 4$ . Тогда  $(d^2)^2 \neq 0$ , то есть  $d^2 \in [d]$ . Поскольку  $d^{n-2} \cdot d^2 = 0$ , то  $d^{n-2} \in [b]$ . Но тогда и  $d^{n-2} \cdot d = 0$ ; противоречие. Следовательно,  $3 \leq n \leq 4$ . Лемма доказана.  $\square$

Пусть  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой типа I. Заметим, что в  $R$  тогда не может быть ортогональных идемпотентов, то есть  $R/J(R)$  является полем или  $R = J(R)$  (см. [9]). Если  $R$  ненильпотентное и в нем нет единицы, то в  $R$  есть главный идемпотент  $e$ , который порождает вершину  $[e]$  без петли, а вершин без петли в звезде типа I нет. Следовательно,  $R$  является локальным кольцом либо нильпотентным [9]. Заметим, что по только что доказанной лемме в  $J(R)$  не может быть ненулевых слов длины 3, так как  $a_i a_j \in [b]$  при различных  $i, j$ , а все элементы из  $[b]$  аннулируют элементы множества  $D(R) = J(R)$  с обеих сторон. Таким образом,  $J(R)^3 = (0)$  и  $[b] = \text{Ann}(J(R))$ . В частности, если  $ax = ay = 0$  и  $xy \neq 0$  для некоторых  $a, x, y \in J(R)$ , то вершины  $[x]$  и  $[y]$  – это различные вершины, которые не смежные между собой, но смежные с вершиной  $[a]$ . В силу того, что сжатый граф делителей нуля кольца  $R$  является звездой, следует, что  $[a] = [b]$ , то есть  $a \in \text{Ann}(J(R))$ . Итак, кольцо  $R$  является кольцом типа (7) из формулировки теоремы. Заметим, что условие (1) для случая, когда в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  не более пяти вершин, можно опустить. Это мы докажем ниже, когда будем доказывать обратное утверждение для пунктов (7) и (8) теоремы.

Пусть граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  – звезда типа II. Тогда в  $R$  не может быть ортогональных идемпотентов. Поэтому кольцо  $R$  либо нильпотентно, либо  $R/J(R)$  является полем. Пусть  $R$  является локальным или нильпотентным. Докажем, что кольцо  $R$  является кольцом из пункта (8) настоящей теоремы. В этом случае  $D(R) = J(R)$  [9]. Тогда условие  $x, y \in l(a) \cup r(a)$  для некоторых  $a, x, y \in J(R)$ , таких, что  $xy \neq 0$ , равносильно тому, что либо  $[x] = [y]$  является вершиной без петли, либо  $[x]$  и  $[y]$  – две различные вершины, не смежные друг с другом. В обоих случаях это означает, что  $[a] = [b]$ , то есть  $az = 0$  или  $za = 0$  для любого  $z \in J(R)$ . Таким образом, пункт (a) выполняется. Поскольку  $\Gamma_{\sim}(R)$  – это звезда типа II, то в нем есть как минимум три вершины:  $[b]$ ,  $[d]$  и  $[a_1]$ . Положим  $z = d$  и  $t = a_1$  и увидим, что пункт (b) тоже выполняется.

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда  $\Gamma_{\sim}(R)$  – звезда типа II и не является ни нильпотентным, ни локальным. Тогда в  $R$  есть главный идемпотент  $e$ , то есть  $\bar{e}$  – единица в фактор-кольце  $R/J(R)$ ,  $R/J(R)$  является полем и, в частности,  $eRe$  является локальным кольцом. Докажем, что в этом случае  $R$  является кольцом типа (9) из формулировки теоремы. Покажем сначала, что  $J(eRe) + eR(1 - e) + (1 - e)Re + (1 - e)R(1 - e) = J(R)$ . Действительно,  $J(eRe) + eR(1 - e) + (1 - e)Re + (1 - e)R(1 - e) \subseteq J(R)$ , так как элемент  $\bar{e}$  является единицей в поле  $R/J(R)$  и  $J(eRe) = J(R) \cap eRe$  [9]. Обратно, возьмем произвольный элемент  $x = ex_1e +$

$ex_2(1-e) + (1-e)x_3e + (1-e)x_4(1-e) \in J(R)$ . Докажем, что  $ex_1e \in J(eRe)$ . Поскольку  $\bar{e}$  – единица в  $R/J(R)$ , то  $x = ex_1e + z$ , где  $z = ex_2(1-e) + (1-e)x_3e + (1-e)x_4(1-e) \in J(R)$ . Отсюда  $ex_1e = x - z \in J(R) \cap eRe = J(eRe)$  [9, С. 75]. Итак, обратное включение доказано. Предположим, что некоторый элемент  $eje + em(1-e) + (1-e)le + (1-e)t(1-e)$ , где  $eje \notin J(eRe)$ , в квадрате равен нулю. Тогда  $(eje)^2 + em(1-e)le = 0$ , так как сумма групп в пирсовском разложении является прямой. Значит,  $(eje)^2 = -em(1-e)le = -em(1-e) \cdot (1-e)le \in eR(1-e) \cdot (1-e)Re \subseteq J(R)^2$ . Тогда элемент  $eje$  локального кольца  $eRe$  является нильпотентным, то есть  $eje \in J(eRe)$ ; противоречие. Таким образом, все элементы такого вида не могут в квадрате быть равными нулю. Поэтому  $[e] = [d]$  и  $eRe \setminus J(eRe) + R_1 + R_2 + S \subseteq [e]$  (вершина  $[d]$  содержит все элементы кольца  $R$ , которые в квадрате не равны нулю). Кроме того, элементы из множеств  $eR(1-e) + (1-e)R(1-e)$  и  $(1-e)Re + (1-e)R(1-e)$  аннулируются идемпотентом  $e$  хотя бы с одной стороны, поэтому все ненулевые элементы этих множеств содержатся в вершине  $[b]$ . По лемме 1(3) множества  $eR(1-e)$ ,  $(1-e)Re$  и  $(1-e)R(1-e)$  аннулируют друг друга с обеих сторон и каждое из них в квадрате равно нулю.

Если  $J(eRe) = (0)$ , то  $eRe$  является конечным полем. Далее, имеем, что  $eRe^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e) \subseteq [e]$ . Наконец, элементы из множества  $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e)$  (если такие существуют) не аннулируют идемпотент  $e$  ни с одной стороны. Следовательно, могут лежать только в вершинах  $[a_i]$  и  $[e]$ . Но произведение любых двух элементов из этой суммы равно нулю, так как  $eR(1-e)^*$ ,  $(1-e)Re^*$ ,  $(1-e)R(1-e)^* \subseteq [b]$ . Поэтому можно считать, что  $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e) \subseteq [a_1]$  (если таких элементов не существует, то вершин в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  всего две, граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является полным и кольцо  $R$  является кольцом типа (6) из формулировки теоремы).

Теперь будем считать, что  $J(eRe) \neq (0)$ . Поскольку элементы из  $J(eRe)^*$  не аннулируют  $e$ , то они все могут лежать только в вершинах  $[a_i]$  и  $[e]$ . Но элементы из  $J(eRe)^*$  не могут лежать в разных вершинах, поскольку  $J(eRe)$  является нильпотентным подкольцом и, следовательно, имеет ненулевой аннулятор. Можем полагать, что  $J(eRe)^* \subseteq [a_1]$ . Тогда по лемме 1 имеем, что  $J(eRe)^2 = (0)$ . Более того, все элементы из последних трех пирсовских компонент аннулируют с обеих сторон элементы из суммы  $J(eRe)^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$  (по лемме 1), то есть  $J(R)^2 = (0)$ . Значит,  $J(eRe)^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e) \subseteq [a_1]$ . Элементы из множества  $eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e)$  (если такие

есть) не могут аннулировать элемент  $e$ , но должны аннулировать элементы из  $J(eRe)^* + eR(1 - e) + (1 - e)Re + (1 - e)R(1 - e) \subseteq [a_1]$ . Поэтому  $eR(1 - e)^* + (1 - e)Re^* + (1 - e)R(1 - e) \subseteq [a_1]$ .

Осталось доказать обратное утверждение для двух пунктов теоремы: (7) и (8). Заметим, что для локального кольца  $R$   $\Gamma_{\sim}(R) = \Gamma_{\sim}(J(R))$  [9, С. 74]. Поэтому достаточно доказать обратные утверждения для нильпотентного кольца из условий (7) и (8) настоящей теоремы. Во всех этих случаях в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  есть вершина с петлей, смежная со всеми остальными: это та вершина, которая содержит  $Ann(R)$ . Будем далее эту вершину обозначать через  $[b]$  (как и для звезд типа I и II).

Итак, пусть  $R$  – нильпотентное кольцо,  $R^3 = (0)$ ,  $R^2 \neq (0)$ ,  $x^2 = 0$  для всех  $x \in R$ . Докажем, что граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  в этом случае – это звезда типа I. Заметим, что в этом случае все вершины с петлями. Поскольку  $x^2 = 0$  для всех  $x \in R$ , то кольцо  $R$  коммутативно по нулю, то есть  $xy = 0$  тогда и только тогда, когда  $yx = 0$  для всех  $x, y \in R$ . Это следует из того, что  $(x + y)^2 = 0$  для всех  $x, y \in R$ , то есть  $xy = -yx$ . Так как  $R^2 \neq (0)$ , то граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  содержит как минимум три вершины, из которых одна – это вершина  $[b]$  с петлей, а две других – это  $[x]$  и  $[y]$  для элементов  $x, y \in R$ , таких, что  $xy \neq 0$  (эти элементы не могут попасть в одну вершину, так как все вершины с петлями; также ни одна из вершин  $[x]$  и  $[y]$  не может совпасть с  $[b]$ , так как вершина  $[b]$  смежна со всеми вершинами). Далее, если в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  ровно три вершины, то это не может быть треугольник, иначе все три вершины (они же все с петлями) можно стянуть в одну. Таким образом, если вершин в графе ровно три, то граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  представляет из себя цепь на трех вершинах с петлями, то есть это звезда типа I. Пусть вершин в графе более трех, но менее шести. Предположим, что граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  не является звездой. Тогда в нем есть две различные вершины  $[a_1]$  и  $[a_2]$ , отличные от  $[b]$  и смежные между собой. Поскольку вершины  $[a_1]$  и  $[a_2]$  различные, то должна существовать еще одна вершина  $[a_3]$ , которая не смежна, например, с вершиной  $[a_1]$ , но смежна с  $[a_2]$  (если такой вершины не существует, то вершины  $[a_1]$  и  $[a_2]$  можно стянуть в одну). В силу коммутативности по нулю кольца  $R$  вершина  $[a_1 + a_3]$  не смежна с  $[a_1]$  и  $[a_3]$ , но смежна с  $[a_2]$ . Поэтому вершина  $[a_1 + a_3]$  не может совпасть ни с одной из вершин  $[b]$ ,  $[a_i]$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то есть это пятая вершина графа  $\Gamma_{\sim}(R)$ . Если других вершин в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  нет, то вершину  $[a_2]$ , которая смежна со всеми вершинами в графе, можно стянуть с вершиной  $[b]$ , чего быть не может. Значит, есть еще одна вершина  $[a_4]$ , которая не смежна с  $[a_2]$ . Стало быть, в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  минимум шесть вершин. Противоречие. Рассмотрим теперь случай,

когда для  $R$  выполняется условие (1):  $ax = ay = 0 \Leftrightarrow a \in \text{Ann}(R)$  для всех  $a, x, y \in R$ , таких, что  $xy \neq 0$ . Для завершения доказательства в этом случае достаточно взять  $a = a_2$ ,  $x = a_1$  и  $y = a_3$ . Тогда  $ax = ay = 0$  в силу коммутативности по нулю,  $xy \neq 0$ , но  $a \notin \text{Ann}(R) = [b]$ ; противоречие доказывает этот случай.

Наконец, пусть  $R$  является нильпотентным кольцом, для которого выполняются следующие два условия:

- (1) для всех  $a, x, y \in R$ , таких, что  $xy \neq 0, x \neq y$ , выполняется равносильность:  $x, y \in l(a) \cup r(a) \Leftrightarrow az = 0$  или  $za = 0$  для любого  $z \in R$ ;
- (2) найдутся  $z, t \in R$ , такие, что  $z^2 \neq 0, t^2 = 0, zt \neq 0, tz \neq 0$

Докажем, что граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  – звезда типа II. Заметим, что в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  есть по крайней мере три вершины:  $[b]$ ,  $[t]$ ,  $[z]$ , причем  $\text{Ann}(R) \subseteq [b]$ , вершины  $[t]$  и  $[z]$  не смежны друг с другом, вершины  $[b]$  и  $[t]$  имеют петли, а вершина  $[z]$  – без петли. Докажем, что вершина  $[z]$  является висячей. Пусть существует вершина  $[w]$ , отличная от  $[b]$ , которая тоже смежна с  $[z]$ . Тогда для любых различных  $z_1, z_2 \in [z]$  (если такие существуют) имеем, что  $z_1 z_2 \neq 0$ ,  $z_1, z_2 \in l(w) \cup r(w)$ . По условию это влечет, что  $[w]$  – это вершина с петлей, смежная со всеми остальными. Значит, ее можно объединить в одну вершину с вершиной  $[b]$ . Противоречие. Следовательно, вершина  $[z]$  содержит только один элемент – это  $z$ , чего быть не может, так как  $[z] = [z + j]$  для любого ненулевого элемента  $j \in \text{Ann}(R)$ . Новое противоречие показывает, что вершина  $[z]$  является висячей. Аналогичные рассуждения показывают, что любая другая вершина без петли (если она существует), тоже является висячей, то есть смежной только с вершиной  $[b]$ , но это означает, что мы можем все вершины без петель стянуть в одну. Итак, в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  ровно одна вершина без петли – это вершина  $[z]$ , и она является висячей. Если вершин всего три, то все доказано: граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  это цепь  $[z] - [b] - [t]$ , то есть является звездой типа II. Предположим, что вершин более трех. Обозначим через  $[s]$  четвертую вершину. В силу доказанного выше она имеет петлю и не смежна с вершиной  $[z]$ . Если в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  все вершины с петлями, отличные от  $[b]$ , являются висячими, то все доказано. Предположим противное. Тогда, не нарушая общности, можем считать, что вершины  $[t]$  и  $[s]$  смежны друг с другом. Должна существовать еще одна вершина  $[v]$ , которая смежна с одной из вершин  $[t]$  и  $[s]$ , но не смежна с другой из них (иначе вершины  $[t]$  и  $[s]$  можно стянуть). Будем полагать, что  $[v]$  смежна с  $[s]$ , но не смежна с  $[t]$ . Тогда  $tv \neq 0$

и  $t, v \in l(s) \cup r(s)$ . По условию это влечет, что  $[s]$  смежна со всеми вершинами в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  и ее можно стянуть с вершиной  $[b]$ . Противоречие доказывает, что все вершины в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$ , кроме вершины  $[b]$ , являются висячими, причем в графе  $\Gamma_{\sim}(R)$  ровно одна вершина без петли. Таким образом, граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой типа II. Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $R$  — конечное кольцо, у которого граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является ациклическим порядка более 3. Тогда кольцо  $R$  либо нильпотентное, либо локальное.

Отметим, что в работе [6] описаны все сжатые графы делителей нуля конечных колец на четырех вершинах. Если посмотреть список этих графов, то видно, что звезда и типа I и типа II на четырех вершинах возможна [6]. Мы привели примеры таких колец в примерах 1 и 2.

**Пример 1.** Рассмотрим кольцо  $R = \langle x \rangle \dot{+} \langle y \rangle \dot{+} \langle z_1 \rangle \dot{+} \langle z_2 \rangle$ , где  $2R = (0)$ ,  $z_1, z_2 \in \text{Ann}(R)$ ,  $x^2 = y^2 = 0$ ,  $xy = z_1$ ,  $yx = z_2$ . Тогда  $[b] = \{z_1, z_2, z_1 + z_2\}$ ,  $[a_1] = \{x, x + z_1, x + z_2, x + z_1 + z_2\}$ ,  $[a_2] = \{y, y + z_1, y + z_2, y + z_1 + z_2\}$  и  $[d] = \{x + y, x + y + z_1, x + y + z_2, x + y + z_1 + z_2\}$ , то есть граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  — звезда типа II.

**Пример 2.** Пусть  $R = \langle a \rangle \dot{+} \langle b \rangle \dot{+} \langle c \rangle \dot{+} \langle d \rangle$ , где  $2R = (0)$ ,  $bR = Rb = (0)$ ,  $x^2 = 0$  для всех  $x \in R$  и  $ad = da = ac = ca = dc = cd = b$ . В этом случае  $[b] = \{b, a + c + d, a + b + c + d\}$ ,  $[a_1] = \{a, a + b, c + d, c + d + b\}$ ,  $[a_2] = \{c, b + c, a + d, a + b + d\}$  и  $[a_3] = \{d, b + d, a + c, a + b + c\}$ , то есть граф  $\Gamma_{\sim}(R)$  является звездой типа I.

В примерах 1 и 2 кольца нильпотентные. В следующем примере мы приведем ненильпотентное кольцо без единицы с ациклическим сжатым графом делителей нуля.

**Пример 3.** Пусть  $e_{ij}$  — матричные единицы. Рассмотрим кольцо  $A_p = \{\alpha e_{11} + \beta e_{21}; \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p\}$ , где  $p$  — простое число,  $\mathbb{Z}_p$  — кольцо классов вычетов по модулю  $p$ . Тогда в графе  $\Gamma_{\sim}(A_p)$  ровно две вершины: одна с петлей, содержащая элементы вида  $\gamma e_{21}$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ , а вторая — без петли, в которую попадают все остальные элементы кольца.

Ниже приведен пример локального кольца с ациклическим сжатым графом делителей нуля с тремя вершинами.

**Пример 4.** Граф  $\Gamma_{\sim}(\mathbb{Z}_p^4)$ , где  $p$  — простое число, состоит из трех вершин:  $[b] = [\bar{p}^3]$ ,  $[a_1] = [\bar{p}^2]$  и  $[d] = [\bar{p}]$ , — то есть является звездой типа II.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447.
- [2] S.P. Redmond, *The Zero-Divisor Graph of a Noncommutative Ring*, Int. J. Commut. Rings, **1(4)** (2002), 203–211.
- [3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Comm. Alg., **38** (2010), 2965–2980.
- [4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order  $p^4$  and  $p^3$* , Comm. Alg., **41** (2013), 765–775.
- [5] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings*, Siberian Math. J., **61(1)** (2020), 76–84.
- [6] A.S. Monastyreva, *The Compressed Zero-divisor Graphs of Order 4*, J. Alg. Appl., **21(9)** (2022), 2250179.
- [7] A.A. Afanas'ev, A.S. Monastyreva, *Compressed and Partially Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings*, Sib. Math. J., **64(2)** (2023), 281–291.
- [8] A.S. Monastyreva, *Finite Non-Nilpotent Rings with Complete Compressed Zero-Divisor Graphs*, Lobach. J. Math., **41(9)** (2020), 1666–1671.
- [9] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Moscow, Gelios-ARV, 2006 (in Russian).
- [10] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *On zero-divisor graphs of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 465–480.
- [11] E.V. Zhuravlev, O.A. Filina, *On compressed zero-divisor graphs of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18** (2021), 1531–1555.

ANNA S. MONASTYREVA  
ALTAI STATE UNIVERSITY,  
61, LENINA ST.,  
BARNAUL, RUSSIA, 656049  
*E-mail address:* akuzmina1@yandex.ru