Об асимптотике преобразования типа Розенблатта

Евгений Савинов

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва

Abstract

Мы показываем, что преобразование перекрестной независимости (CI) гауссовской смеси имеет асимптотически гауссовское распределение, связанное с гауссовым ядром смеси тем же преобразованием. Дополнительно мы изучаем поведение экстремальных значений в соответствующих схемах серий.

We show that a cross independence (CI) transformation of some Gaussian mixture has an asymptotically Gaussian distribution connected with the Gaussian core of the mixture by the same type of transform. In addition we study a behavior of extreme values in related triangular arrays.

1. Введение.

Мы изучаем поведение максимума гауссовских случайных величин в схеме серий, когда совместные распределения каждой строки не являются гауссовскими, а порождаются смесью гауссовских распределений с использованием CI-преобразования копул, изучавшегося в Savinov and Shamraeva (2023).

Опишем сначала мотивацию введения CI-преобразования. Рассмотрим следующую общую задачу определения компонент смеси. Пусть имеется система случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, описывающая продолжительности работы n различных компонентов сложной системы, работающей в случайной среде. Мы предполагаем, что при заданном состоянии среды (t) компоненты зависимы, имеют различные характеристики, и их совместная функция распределения равна $G_n^{(t)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Таким образом, продолжительности работы компонентов системы в случайной среде описываются смесью

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} G_n^{(t)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \mu(dt), \tag{1}$$

11 мая 2024 г.

где мы предполагаем, что параметр состояния среды одномерный, а мера μ описывает ее вероятностное поведение. Интересует вопрос, можно ли по выборке из распределения F_n что-то узнать о распределении $G_n^{(t)}$, ничего не зная ни о нем, ни о μ.

Поставим более частный вопрос. Можно ли по выборке из F_n определить, является ли это распределение гауссовской смесью. Известно, что один из вариантов многомерного распределения Стьюдента (Kshirsagars Multivariate t-Distribution, см. Kotz and Nadarajah (2004), p. 87) с числом степеней свободы r имеет функции распределения (это показано далее в лемме 1) вида (1) с гауссовскими функциями $G_n^{(t)}$ и мерой μ, зависящей от r.

Предположим, имеется n-мерная выборка, которую нужно проверить на отсутствие согласия с данным семейством распределений (сразу для всех r). Находя ее CI-преобразование (с использованием оценок условных функций распределения) и взяв проекцию меньшей размерности, задача сводится к проверке отсутствия согласия с гауссовской копулой (связанной с $G_n^{(t)}$, но не зависящей от t). Таким образом, задача упрощается, по крайней мере, отсутствием необходимости в оценке параметра r. Не исключено, что подобный метод можно распространить на другие гауссовские смеси, что позволит исключать сразу более широкие семейства распределений. Отметим, что результат работы Savinov and Shamraeva (2023) позволяет говорить об использовании данного метода для проверки отсутствия бесконечной перестановочности (т.е. принадлежности, в силу теоремы де Финетти, к смесям независимых случайных величин).

2. Основные понятия.

Прежде чем напомнить определение копулы введем некоторые обозначения.

$\mathbf{I} := [0,1]$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbf{I^n}$. Для $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I^n}$ будем писать $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$, когда $a_k \leqslant b_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Для $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$ будем обозначать через $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ n-прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbf{I^n}$. $\Phi(\cdot)$ -

Определение 1. *Пусть* $H : \mathbf{I^n} \to \mathbf{I}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I^n}$, $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *–* n*-прямоугольник в* $\mathbf{I^n}$*.* H-объемом n*-прямоугольника* B *будем называть разность порядка* n *функции* H *на* B

$$V_H(B) = \Delta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}),$$

где разность первого порядка определяется как

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \ldots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) - H(t_1, \ldots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \ldots, t_n).$$

Определение 2 (Copula). *Функция $C : \mathbf{I^n} \to \mathbf{I}$ называется* n-копулой*, если она обладает следующими свойствами*

1) Для каждого $\mathbf{u} \in \mathbf{I^n}$

$$C(\mathbf{u}) = 0, \quad \textit{если} \quad u_1 u_2 \cdots u_n = 0;$$

2) Если все координаты $\mathbf{u}$ кроме u_k равны 1, то

$$C(\mathbf{u}) = u_k;$$

3) Для всех $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из $\mathbf{I^n}$ таких, что $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geqslant 0.$$

Как известно, копула связывает многомерную функцию распределения с одномерными маргинальными распределениями (см., например, Nelsen (2006)).

Далее вводится понятие CI-преобразования.

Рассмотрим случайный вектор $\mathrm{X_n}$ с абсолютно-непрерывной функцией распределения

$$F(x_1, \ldots, x_n) = C\left(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\right)$$

на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\}$. Здесь $F_i(x_i)$ маргинальные распределения и C копула. Обозначим через $f_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)$ плотность распределения вектора $\mathrm{X_n}$, $f_i(x_i)$ маргинальные плотности, и $F_{i\,|\,1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(x_i|x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$ условную функцию распределения случайной величины X_i относительно всех остальных компонент (знак $\hat{}$ означает пропуск соответствующего компонента). Рассмотрим случайные величины

$$X^*_{i,n} = F_{i\,|\,1\ldots\hat{\imath}\ldots n}(X_i|X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n).$$

Как показано в Savinov and Shamraeva (2023), их совместная функция распределения является копулой, и следующее определение корректно.

Определение 3. *Будем назвать отображение $C \mapsto C^{ci}$*

$$C^{ci}(u) = \mathsf{P}\{X^*_{1,n} \leqslant u_1, \ldots, X^*_{n,n} \leqslant u_n\}, \quad u = (u_1, \ldots, u_n),$$

где $\mathbf{X_n} = (X_1, \ldots, X_n)$ произвольный вектор с копулой C, CI-преобразованием *(*Cross-Independence*) абсолютно-непрерывной копулы C. Копулу $C^{ci}(u)$ будем называть CI-копулой или CI-образом копулы C.*

Далее мы вводим меру на гильбертовом пространстве только с одной целью – с помощью проекций меры на некоторый ортонормированный базис получить согласованное семейство копул.

Рассмотрим измеримое пространство $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где $\mathbb{H}$ вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным оронормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, борелевской σ-алгеброй и скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Будем рассматривать на нем счетно-аддитивную меру μ с характеристическим функционалом

$$\Psi_\mu(y) = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2}\langle By, y\rangle\right\} g_r(t)\,dt, \qquad y \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

где B линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор с собственными векторами $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{-\frac{r}{2t}\right\}, \qquad t > 0.$$

Следует отметить, что эту меру можно назвать мерой Стьюдента на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ с r степенями свободы. Действительно, выберем $\{f_k\}$ – произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и рассмотрим случайные величины $X_i = \langle\cdot, f_i\rangle$ на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$. Ясно, что соответствующие проекции меры μ (распределения случайных векторов $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$) имеют характеристические функции

$$\psi_{1\ldots n}(y_1, \ldots, y_n) = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2}\sum_{i,j=1}^{n} y_i y_j \langle Bf_i, f_j\rangle\right\} g_r(t)\,dt. \tag{3}$$

Покажем, что характеристическая функция (3) соответствует одному из вариантов многомерного распределения Стьюдента – Kshirsagars Multivariate t-Distribution (см. Kotz and Nadarajah (2004), стр. 87).

Лемма 1. *Предположим, что вектор Y имеет n-мерное гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $C = (\langle Bf_i, f_j\rangle)$, и S_r^2 независимая от Y случайная величина с распределением $\chi^2(r)$ ($r \in \mathbb{N}$).). Тогда случайный вектор $T = Y/\sqrt{S^2/r}$ обладает характеристической функцией (3).*

Доказательство. Характеристическая функция случайного вектора T имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_T(y) = \mathrm{E}\exp\left\{i\frac{\langle Y, y\rangle}{\sqrt{S_r^2/r}}\right\} &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\exp\left\{i\frac{\langle Y, y\rangle}{\sqrt{S_r^2/r}}\right\}\middle|\, \frac{1}{S_r^2/r}\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(\exp\left\{i\langle Y, y\rangle\sqrt{U}\right\}\middle|\, U\right)\right],\end{aligned}$$

где $U \sim inv\Gamma\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$ (обратное гамма-распределение с параметрами $(r/2, r/2)$). Тогда

$$\varphi_T(y) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left(\exp\left\{i\langle Y, y\sqrt{t}\rangle\right\}\right) g_r(t)\,dt = \int_0^\infty \varphi_Y\left(y\sqrt{t}\right) g_r(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2}\langle Cy, y\rangle\right\} g_r(t)\,dt.$$

$\square$

Замечание 1. *Конечно, такое представление распределения Стьюдента как гауссовской смеси хорошо известно, и его структура зависимости (как и других нормальных смесей в случае размерности два) изучались с использованием копул, например, в Heinen and Valdesogo (2020).*

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Обозначим $B_n = \pi_n B \pi_n$, где π_n — ортопроектор $\mathbb{H} \to \mathbb{H}_n = \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$. Введем обозначения для следующих квадратичных форм:

$$\begin{aligned} s_n^2 &:= s_n^2(h) = \frac{1}{n}\langle B_n^{-1}\pi_n h, \pi_n h\rangle, \\ s_\infty^2 &:= s_\infty^2(h) = \lim_{n\to\infty} s_n^2(h), \end{aligned}$$

Случайные величины

$$\zeta_{i,n} := \zeta_{i,n}(h) = \frac{\langle B_n^{-1} f_i, h\rangle}{s_\infty \langle B_n^{-1} f_i, f_i\rangle^{1/2}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

относительно меры μ (см. доказательство теоремы 1 в Savinov (2015)) совместно гауссовские с ковариациями

$$c_{ij}^{(n)} := cov\big(\zeta_{i,n}, \zeta_{j,n}\big) = \frac{\langle B_n^{-1} f_i, f_j\rangle}{[\langle B_n^{-1} f_i, f_i\rangle\langle B_n^{-1} f_j, f_j\rangle]^{1/2}}. \tag{5}$$

3. Сходимость CI-копул

Теорема 1. *Пусть C_n стьюдентовские копулы распределений с характеристическими функциями (3). Обозначим через $C_{gB_n^-}$ гауссовскую n-копулу с матрицей корреляций $\left(c_{ij}^{(n)}\right)$, элементы которой определяются уравнением (5). Тогда для любых $k \in \mathbb{N}$ и $(u_1, \ldots, u_k) \in (0,1)^k$ выполняется сходимость*

$$C_n^{ci}(u_1, \ldots, u_k, 1 \ldots, 1) \to C_{gB_k^-}(u_1, \ldots, u_k), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Без потери общности, мы можем предполагать C_n копулами семейства стьюдентовских векторов $\mathbf{X}_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, определенных на измеримом пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где $\mathbb{H}$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным ортонормированным базисом $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, борелевской σ-алгеброй и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, счетно-аддитивной мерой Стьюдета μ с r степенями свободы и характеристическим функционалом (2), $X_i = \langle \cdot, f_i \rangle$.

Обозначим $x_i := \Phi^{-1}(u_i)$. Тогда

$$C_n^{\mathrm{ci}}\left(u_1, \ldots, u_k, 1 \ldots, 1\right) = C_n^{\mathrm{ci}}\left(\Phi\left(x_1\right), \ldots, \Phi\left(x_k\right), 1 \ldots, 1\right)$$

$$= \mu\left\{\Phi^{-1}\left(X_{1,n}^*\right) \leqslant x_1, \ldots, \Phi^{-1}\left(X_{k,n}^*\right) \leqslant x_k\right\}. \tag{6}$$

Из пункта 3 леммы 3 работы Savinov (2015), следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{\Phi^{-1}\left(X_{1,n}^*\right) \leqslant x_1, \ldots, \Phi^{-1}\left(X_{k,n}^*\right) \leqslant x_k\right\} = \lim_{n\to\infty} \mu\left\{\zeta_{1,n} \leqslant x_1, \ldots, \zeta_{k,n} \leqslant x_k\right\}. \tag{7}$$

Заметим, что для любого $i \leqslant k < n$ выполняется

$$B_n^{-1} f_i = B_k^{-1} f_i. \tag{8}$$

Действительно, положим

$$h := B_n^{-1} f_i \in \mathbb{H}_n, \quad h' := B_k^{-1} f_i \in \mathbb{H}_n,$$

следовательно,

$$f_i = B_k h' = \pi_k B h' = \pi_k \sum_{\tilde{i}=1}^{k} \left\langle h', f_{\tilde{i}} \right\rangle B f_{\tilde{i}} = \sum_{\tilde{k}=1}^{k} \sum_{\tilde{i}=1}^{k} \left\langle h', f_{\tilde{i}} \right\rangle \left\langle B f_{\tilde{i}}, f_{\tilde{k}} \right\rangle f_{\tilde{k}} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{\tilde{i}=1}^{k} \left\langle h', f_{\tilde{i}} \right\rangle \left\langle B f_{\tilde{i}}, f_{\tilde{k}} \right\rangle = \delta_{i\tilde{k}},$$

$$B_n h' = \pi_n B h' = \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \sum_{\tilde{i}=1}^{k} \left\langle h', f_{\tilde{i}} \right\rangle \left\langle B f_{\tilde{i}}, f_{\tilde{k}} \right\rangle f_{\tilde{k}} = \sum_{\tilde{k}=1}^{n} \delta_{i\tilde{k}} f_{\tilde{k}} = f_i = B_n h \quad \Rightarrow$$

$$B_n(h - h') = 0 \quad \Rightarrow \quad h = h',$$

что и доказывает равенство (8).

Из (8) следует, что $c_{ij}^{(n)} = c_{ij}^{(k)}$, и учитывая (4) и (5), получим

$$\mu\left\{\zeta_{1,n} \leqslant x_1, \ldots, \zeta_{k,n} \leqslant x_k\right\} = \mu\left\{\zeta_{1,k} \leqslant x_1, \ldots, \zeta_{k,k} \leqslant x_k\right\} = \\ = C_{gB_k^-}\left(\Phi\left(x_1\right), \ldots, \Phi\left(x_k\right)\right) = C_{gB_k^-}\left(u_1, \ldots, u_k\right), \tag{9}$$

и доказательство теоремы следует из равенств (6), (7) и (9). $\square$

Замечание 2. *Пример CI-преобразования n-мерной гауссовской копулы в Savinov and Shamraeva (2023) показывает, что*

$$C_{gB_k^-}\left(u_1, \ldots, u_k\right) = C_{gB_k}^{ci}(u_1, \ldots, u_k),$$

где C_{gB_k} копула гауссовского распределения с ковариационной матрицей $\langle Bf_i, f_j\rangle$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, из этого примера и теоремы 1 следует, что

$$C_n^{ci}\left(u_1, \ldots, u_k, 1 \ldots, 1\right) \to C_{gB_k}^{ci}(u_1, \ldots, u_k).$$

4. Экстремальная предельная теорема

Теорема 1 и Замечание 2 показывают, что CI-образ распределения Стьюдента оказывается асимптотически гауссовским распределением, которое, в свою, очередь, является результатом CI-преобразования гауссовского ядря исходной смеси.

Сейчас нас будет интересовать следующий вопрос: верно ли, что экстремальные значения случайных величин с CI-копулами распределения Стьюдента и гауссовскими маргинальными распределениями ведут себя так же, как экстремумы гауссовских векторов в схеме серий?

Стоит заметить, что экстремальные значения в схеме серий зависимых случайных величин, связанные различными семействами копул, изучались в Lebedev (2015). В работе также представлены обобщенные результаты об экстремальных индексах для схем серий с архимедовыми копулами. Кроме того, в Goldaeva and Lebedev (2018) изучались вопросы серий случайной длины.

Используем классические для экстремальной теории (см. Leadbetter et al. (1983)) числовые последовательности ($n \geqslant 2$)

$$\alpha_n = (2\ln n)^{1/2}, \quad \beta_n = (2\ln n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln n)^{-1/2}(\ln\ln n + \ln(4\pi)).$$

Теорема 2. *Рассмотрим семейство стьюдентовских случайных векторов $\mathbf{X}_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ $n = 1, 2, \ldots,$ — определенных на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$,* *описанное выше. Пусть C_n соответствующие t-копулы, $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ обозначают стандартную нормальную функцию распределения и плотность, соответственно. Введем схему серий случайных величин $\left\{X_i^{(n)}\right\}_{i=1}^n$ $n = 1, 2, \ldots$, определенную на подходящем вероятностном пространстве $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathsf{P}_0\}$ и имеющую совместную функцию распределения*

$$\mathsf{P}_0\left\{X_1^{(n)} \leqslant x_1, \ldots, X_n^{(n)} \leqslant x_n\right\} = C_n^{ci}(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)).$$

Если базис $\{f_k\}$ такой, что

$$\delta := \limsup_{n\to\infty} \max_{i\neq j} \left|c_{ij}^{(n)}\right| < 1, \tag{10}$$

и для $\gamma > 0$ существует $0 < \alpha < \frac{1-\delta}{1+\delta}$ такой, что

$$\max_{n^\alpha < j-i < n} \left|c_{ij}^{(n)} \ln(j-i) - \gamma\right| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{11}$$

то для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость

$$\mathsf{P}_0\left\{\alpha_n\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i^{(n)} - \beta_n\right) \leqslant x\right\} \to \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\,z}\right\} \varphi(z)\, dz. \tag{12}$$

5. Вспомогательные результаты

Следующие леммы 2 и 3 устанавливают асимптотическое поведение экстремумов для сильно зависимых серий в схеме с совместными нормальными распределениями. Случай слабой зависимости, а именно, асимптотического поведение элементов матрицы точности при удалении от главной диагонали ($d > n^\alpha$) при росте размерности ($\overline{\overline{o}}\left(\ln^{-1} n\right)$ вместо $\ln^{-1} n$, как в настоящей работе), исследовался в Savinov (2015). Следует заметить, что предыдущие исследования экстремальных значений в случае гауссовской схемы серий касались только случая слабой зависимости серий с условием стационарности (см. Hsing et al. (1996)). Случай сильной зависимости рассматривался только в случае стационарных последовательностей (см. Mittal Y. (1975)).

Введем схему серий $(0,1)$-гауссовских случайных величин

$$\{\xi_{i,n},\, i = 1, \ldots, n\}_{n=1}^{\infty},$$

где случайные величины в каждой строке совместно гауссовские с нулевыми средними и ковариационной матрицей $C^{(n)} = \left(c_{ij}^{(n)}\right)$. Обозначим

$$M_n^* := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \xi_{i,n}.$$

Для $\gamma > 0$, $0 < \alpha < 1$ положим $(n > 1)$

$$\rho_n := \frac{\gamma}{\ln n}, \quad w_{ij}^{(n)} := \max\left\{\rho_n, \left|c_{ij}^{(n)}\right|\right\}, \quad \delta := \limsup_{n\to\infty} \max_{i\neq j} w_{ij}^{(n)},$$

$$\delta^*_{n,\alpha}(\gamma) := \max_{n^\alpha < j-i < n} \left|c_{ij}^{(n)} \ln(j-i) - \gamma\right|.$$

Лемма 2. *Будем считать выполненными следующие условия*

1) $\delta < 1$*;*

2) для заданного $\gamma > 0$ *существует* $0 < \alpha < \frac{1-\delta}{1+\delta}$ *такое, что*

$$\delta^*_{n,\alpha}(\gamma) \to 0, \quad n \to \infty; \tag{13}$$

3) числовая последовательность $u_n \to \infty$ *такова, что* $n\big(1 - \Phi(u_n)\big)$ *ограничена.*

Тогда

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left|c_{ij}^{(n)} - \rho_n\right| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1 + w_{ij}^{(n)}}\right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Для доказательства достаточно предположить, что существует некоторое $\tau > 0$, удовлетворяющее условию

$$n\big(1 - \Phi(u_n)\big) \to \tau, \ n \to \infty. \tag{15}$$

Предположим, что (14) выполняется при этом предположении. Рассмотрим числовую последовательность $\{v_n\}$ такую, что $n\big(1-\Phi(v_n)\big)$ ограничена. Тогда существует $\tau > 0$ и соответствующая последовательность $\{u_n\}$ такая, что для достаточно больших n, выполняется

$$n\big(1 - \Phi(u_n)\big) \geqslant n\big(1 - \Phi(v_n)\big) \quad \Rightarrow \quad v_n \geqslant u_n \quad \Rightarrow$$

$$\exp\left(-\frac{v_n^2}{1 + w_{ij}^{(n)}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{u_n^2}{1 + w_{ij}^{(n)}}\right).$$

И сходимость (14) имеет место и для последовательности v_n.

Используя известную асимптотику

$$1 - \Phi(u) \sim \frac{\varphi(u)}{u}, \quad u \to \infty, \tag{16}$$

покажем справедливость

$$u_n \sim (2 \ln n)^{1/2}, \quad n \to \infty, \tag{17}$$

$$\exp\left(-\frac{u_n^2}{2}\right) \sim \frac{u_n \tau \sqrt{2\pi}}{n}, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

Действительно, ввиду (15) очевидно, что $u_n \to \infty$. В силу (16) и (15) при $n \to \infty$

$$\frac{n\varphi(u_n)}{u_n} \to \tau, \tag{19}$$

а отсюда сразу следует (18). Кроме того, (19) влечет

$$\ln n - \frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{u_n^2}{2} - \ln u_n - \ln \tau \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда при $n \to \infty$

$$\frac{u_n^2 + 2 \ln u_n}{2 \ln n} \to 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_n^2}{2 \ln n} = \frac{u_n^2 + 2 \ln u_n}{2 \ln n} \cdot \frac{u_n^2}{u_n^2 + 2 \ln u_n} \to 1,$$

откуда и следует (17).

Разделим сумму в (14) на две группы слагаемых. Выберем должным образом (см. (13)) $\alpha < \frac{1-\delta}{1+\delta}$ и оценим первую сумму.

В силу непрерывности функции $g(x) = \frac{1-(\delta+x)}{1+\delta+x}$ в правой полуокрестности нуля, найдется такое $0 < \varepsilon < \min\{\delta, 1-\delta\}$, что

$$\alpha < \frac{1-(\delta+\varepsilon)}{1+\delta+\varepsilon}.$$

По определению верхнего предела найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sup_{n>N} \max_{i \neq j} w_{i,j}^{(n)} < \delta + \varepsilon.$$

Значит для достаточно больших n $(n > N)$

$$\sum_{1 \leqslant j-i \leqslant n^\alpha} \left| c_{ij}^{(n)} - \rho_n \right| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1 + w_{ij}^{(n)}}\right) \leqslant 4\delta n^{1+\alpha} \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta+\varepsilon}\right) =$$

$$= 4\delta n^{1+\alpha} \left[\exp\left(-\frac{u_n^2}{2}\right)\right]^{\frac{2}{1+\delta+\varepsilon}} = 4\delta n^{1+\alpha} \left(\frac{u_n}{n}\right)^{\frac{2}{1+\delta+\varepsilon}} \left[\tau\sqrt{2\pi}\left(1 + \overline{\overline{o}}\,(1)\right)\right]^{\frac{2}{1+\delta+\varepsilon}}$$

в силу (18). Далее, обозначая через K некоторую константу, зависящую только от τ, δ и ε, и используя (17), получим

$$\leqslant K n^{1+\alpha} \left(\frac{u_n}{n}\right)^{\frac{2}{1+\delta+\varepsilon}} = K n^{\alpha - \frac{1-(\delta+\varepsilon)}{1+\delta+\varepsilon}} (2 \ln n)^{\frac{1}{1+\delta+\varepsilon}} \left(1 + \overline{\overline{o}}\,(1)\right)^{\frac{2}{1+\delta+\varepsilon}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Займемся вторым слагаемым. Обозначим

$$\delta(n^\alpha) := \max_{n^\alpha < j-i < n} w_{ij}^{(n)}.$$

Покажем ограниченность величины $\delta(n^\alpha)\ln n^\alpha$. Действительно,

$$\delta(n^\alpha)\ln n^\alpha = \max_{n^\alpha < j-i < n} \max\left\{\rho_n \ln n^\alpha, \left|c_{ij}^{(n)}\right| \ln n^\alpha\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n^\alpha < j-i < n}\left(\rho_n \ln n^\alpha + \left|c_{ij}^{(n)}\right| \ln n^\alpha\right) \leqslant \max_{n^\alpha < j-i < n}\left(\rho_n \ln n + \left|c_{ij}^{(n)}\right| \ln (j-i)\right) =$$

$$= \gamma + \max_{n^\alpha < j-i < n}\left|c_{ij}^{(n)}\right| \ln(j-i) \leqslant 2\gamma + \delta^*_{n,\alpha}(\gamma).$$

Таким образом,,

$$\delta(n^\alpha)\ln n^\alpha \leqslant M \tag{20}$$

для некоторого $M = M(\alpha)$ в силу (13). Тогда

$$\sum_{n^\alpha < j-i < n}\left|c_{ij}^{(n)} - \rho_n\right| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+w_{ij}^{(n)}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta\left(n^\alpha\right)}\right) \sum_{n^\alpha < j-i < n}\left|c_{ij}^{(n)} - \rho_n\right| =$$

$$= \frac{n^2}{\ln n}\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta\left(n^\alpha\right)}\right)\cdot\frac{\ln n}{n^2}\sum_{n^\alpha < j-i < n}\left|c_{ij}^{(n)} - \rho_n\right|. \tag{21}$$

Рассмотрим в последнем выражении первый множитель и покажем его ограниченность. Воспользуемся неравенством (20) и асимптотикой (18)

$$\frac{n^2}{\ln n}\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta\left(n^\alpha\right)}\right) \leqslant \frac{n^2}{\ln n}\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\frac{M}{\alpha \ln n}}\right) = \frac{n^2}{\ln n}\left[\exp\left(-\frac{u_n^2}{2}\right)\right]^{\frac{2}{1+\frac{M}{\alpha\ln n}}} =$$

$$= \frac{n^2}{\ln n}\left(\frac{u_n}{n}\right)^{\frac{2}{1+\frac{M}{\alpha\ln n}}}\left[\tau\sqrt{2\pi}(1+\overline{\overline{o}}\,(1))\right]^{\frac{2}{1+\frac{M}{\alpha\ln n}}}.$$

Обоначая через K некоторую константу, зависящую от τ, для достаточно больших n получим

$$\leqslant K\frac{n^2}{\ln n}\left(\frac{u_n}{n}\right)^{\frac{2}{1+\frac{M}{\alpha\ln n}}} = K\cdot n^{\frac{2M}{M+\alpha\ln n}}\cdot u_n^{\frac{2\alpha\ln n}{M+\alpha\ln n}}\cdot\frac{1}{\ln n}.$$

Снова пользуясь (17), получим

$$= K\cdot n^{\frac{2M}{M+\alpha\ln n}}\cdot(2\ln n)^{\frac{\alpha\ln n}{M+\alpha\ln n}}\left(1+\overline{\overline{o}}\,(1)\right)^{\frac{2\alpha\ln n}{M+\alpha\ln n}}\cdot\frac{1}{\ln n}.$$

Заметим, что

$$n^{\frac{2M}{M+\alpha\ln n}} \to e^{\frac{2M}{\alpha}}, \quad (2\ln n)^{\frac{\alpha\ln n}{M+\alpha\ln n}}\cdot\frac{1}{\ln n} \to 2, \quad n\to\infty.$$

Таким образом,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n^2}{\ln n} \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta\left(n^\alpha\right)}\right) \leqslant 2Ke^{\frac{2M}{\alpha}}.$$

Теперь рассмотрим второй множитель в (21) и покажем, что он сходится к нулю. Действительно,

$$\frac{\ln n}{n^2} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|c_{ij}^{(n)}-\rho_n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\ln n}{n^2} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|c_{ij}^{(n)}-\frac{\gamma}{\ln(j-i)}\right| + \frac{\ln n}{n^2} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|\rho_n-\frac{\gamma}{\ln(j-i)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha n^2} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|c_{ij}^{(n)}\ln(j-i)-\gamma\right| + \frac{\gamma}{n^2} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|1-\frac{\ln n}{\ln(j-i)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(n-n^\alpha+1\right)^2}{2\alpha n^2}\,\delta_{n,\alpha}^*(\gamma) + \frac{\gamma}{\alpha n^2\ln n} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|\ln\frac{j-i}{n}\right| \to 0, \quad n\to\infty$$

в силу (13) и ограниченности следующего множителя во втором слагаемом:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n^\alpha<j-i<n} \left|\ln\frac{j-i}{n}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\leqslant j-i<n} \left|\ln\frac{j-i}{n}\right| =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \left|\ln(y-x)\right|\,dy = \frac{3}{4}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть выполнены следующие условия (условия 1 и 2 леммы 2)*

1) $\delta<1$*;*

2) для заданного $\gamma>0$ *существует* $0<\alpha<\frac{1-\delta}{1+\delta}$ *такой, что*

$$\delta_{n,\alpha}^*(\gamma)\to 0, \quad n\to\infty. \tag{22}$$

Тогда для любого $x\in\mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\left\{\alpha_n\left(M_n^*-\beta_n\right)\leqslant x\right\} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\,z}\right\}\varphi(z)\,dz. \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим $u_n=x/\alpha_n+\beta_n$. Прежде всего отметим, что в условиях леммы

$$n\left(1-\Phi(u_n)\right)\to e^{-x}.$$

Это следует из теорем 1.5.3 (см. Leadbetter et al. (1983), стр. 14) и 1.5.1 (см. Leadbetter et al. (1983), стр. 13).

Обозначим через $N(B)$ точечный процесс Кокса, дважды стохастический пуассоновский процесс со случайной интенсивностью $\lambda = m(B)\exp\left\{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\zeta\right\}$, где $\zeta \sim N(0,1)$. В частности, одномерные распределения этого процесса имеют вид

$$\mathsf{P}\left\{N(B)=k\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(m(B)\exp\left\{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z\right\}\right)^k}{k!}\times$$

$$\times \exp\left\{-m(B)e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\right\}\varphi(z)\,dz,$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(\cdot)$ мера Лебега.

Для каждого n определим случайный вектор $\eta_n = \{\eta_n(j),\ j=1,2,\dots,n\}$ следующим образом

$$\eta_n\left(j\right) := \xi_{j,n}.$$

Введем точечный процесс выходов конечной случайной последовательности η_n за уровень u_n

$$N_n(B) := \sum_{j:j/n\in B} \mathbf{1}_{\{\eta_n(j)>u_n\}}, \quad B\in\mathcal{B}([0,1]).$$

Тогда (для $0 \leqslant c < d \leqslant 1$)

$$EN_n\left((c,d]\right) = \left([nd]-[nc]\right)\mathsf{P}\left\{\xi_{j,n}>u_n\right\} = \left([nd]-[nc]\right)\left(1-\Phi(u_n)\right) \to \left(d-c\right)e^{-x}.$$

С другой стороны

$$EN\left((c,d]\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left((d-c)\exp\left\{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z\right\}\right)^k}{(k-1)!}\times$$

$$\times \exp\left\{-(d-c)e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}z}\right\}\varphi(z)\,dz =$$

$$= \left(d-c\right)e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\gamma+\sqrt{2\gamma}z\right\}\varphi(z)\,dz =$$

$$= \left(d-c\right)e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(z-\sqrt{2\gamma}\right)\,dz = \left(d-c\right)e^{-x}.$$

Положим

$$c = c_1 < d_1 < \dots < c_k < d_k = d$$

и установим сходимость при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_n\left((c_i, d_i]\right) = 0\right\}\right) \to \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N\left((c_i, d_i]\right) = 0\right\}\right). \tag{24}$$

Обозначим

$$M_n(c,d) := \max\left\{\xi_{j,n} \ : \ cn < j \leqslant dn,\ j \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Прежде всего заметим, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N_n\left((c_i, d_i]\right) = 0\right\}\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n(c_i, d_i) \leqslant u_n\right\}\right). \tag{25}$$

Действительно, событие $\{M_n(c_i, d_i) \leqslant u_n\}$ означает, что на полуинтервале $(c_i, d_i]$ превышения процессом η_n уровня u_n не произошло. Поэтому величина $N_n\left((c_i, d_i]\right) = 0$.

Далее обозначим

$$M_n(c,d,\rho) := \max\left\{\widehat{\zeta}_j \ : \ cn < j \leqslant dn,\ j \in \mathbb{Z}\right\},$$

где $\{\widehat{\zeta}_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ стандартные совместно нормальные случайные величины с одинаковыми ковариациями ρ.

Тогда

$$M_n(c,d,0) \stackrel{d}{=} \max\left\{\zeta_j \ : \ cn < j \leqslant dn,\ j \in \mathbb{Z}\right\},$$

где $\{\zeta_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ независимые стандартные нормальные.

Покажем сходимость

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n\left(c_i, d_i\right) \leqslant u_n\right\}\right) - \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n\left(c_i, d_i, \rho_n\right) \leqslant u_n\right\}\right) \to 0. \tag{26}$$

Для оценки разности воспользуемся нормальной леммой сравнения (Normal Comparison Lemma, Leadbetter et al. (1983), стр.81, теорема 4.2.1).

$$\left|\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n\left(c_i, d_i\right) \leqslant u_n\right\}\right) - \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n\left(c_i, d_i, \rho_n\right) \leqslant u_n\right\}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|c_{ij}^{(n)} - \rho_n\right| \frac{1}{\sqrt{1-\left(w_{ij}^{(n)}\right)^2}} \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+w_{ij}^{(n)}}\right).$$

Поскольку $\delta < 1$, для достаточно больших n верна оценка $\delta \leqslant \max\limits_{i\neq j} w_{ij}^{(n)} < \sqrt{\delta}$. Тогда

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\delta}}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|c_{ij}^{(n)} - \rho_n\right| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+w_{ij}^{(n)}}\right) \to 0, \quad n \to \infty$$

в силу леммы 2.

Осталось показать сходимость

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n\left(c_i, d_i, \rho_n\right) \leqslant u_n\right\}\right) \to \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{N\left(\left(c_i, d_i\right]\right) = 0\right\}\right). \qquad (27)$$

Заметим, что $\forall i = 1, 2, \ldots, k$

$$M_n(c_i, d_i, \rho) \stackrel{d}{=} \sqrt{1-\rho}\, M_n(c_i, d_i, 0) + \sqrt{\rho}\,\zeta$$

где ζ стандартная нормальная величина, не зависящая от системы $\{\zeta_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$.

Действительно,

$$\sqrt{1-\rho}\, M_n(c_i, d_i, 0) + \sqrt{\rho}\,\zeta \stackrel{d}{=} \max_{c_i n < j \leqslant d_i n}\left(\sqrt{1-\rho}\,\zeta_j + \sqrt{\rho}\,\zeta\right) \stackrel{d}{=} \max_{c_i n < j \leqslant d_i n} \widehat{\zeta}_j.$$

Так как полуинтервалы $(c_i, d_i]$ не пересекаются, то одинаково распределены и векторы с компонентами $M_n(c_i, d_i, \rho)$ и $\sqrt{1-\rho}\, M_n(c_i, d_i, 0) + \sqrt{\rho}\,\zeta$ соответственно.

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n\left(c_i, d_i, \rho_n\right) \leqslant u_n\right\}\right) = \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{\sqrt{1-\rho_n}\, M_n(c_i, d_i, 0) + \sqrt{\rho_n}\,\zeta \leqslant u_n\right\}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n(c_i, d_i, 0) \leqslant \frac{u_n - \sqrt{\rho_n}\, z}{\sqrt{1-\rho_n}}\right\}\right) \varphi(z)\, dz. \qquad (28)$$

Рассмотрим отдельно вероятность под знаком интеграла в (28).

Учитывая, что $\rho_n = 2\gamma/\alpha_n^2$, имеем

$$v_n := \frac{u_n - \sqrt{\rho_n}\, z}{\sqrt{1-\rho_n}} = \left(1 + \frac{1}{2}\,\rho_n + \bar{\bar{o}}\left(\rho_n\right)\right)\left(\frac{x}{\alpha_n} + \beta_n - \sqrt{\rho_n}\, z\right) =$$

$$= \frac{x + \gamma - \sqrt{2\gamma}\, z}{\alpha_n} + \beta_n + \bar{\bar{o}}\left(\alpha_n^{-1}\right). \qquad (29)$$

Далее

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left\{M_n(c_i, d_i, 0) \leqslant v_n\right\}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(\Phi(v_n)\right)^{[d_i n]-[c_i n]} = \qquad (30)$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{n\left(1-\Phi(v_n)\right)}{n}\right)^{[d_i n]-[c_i n]}.$$

Заметим, что в силу (29) и теоремы 1.5.3 (см. Leadbetter et al. (1983), стр. 14)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{M_n(0, 1, 0) \leqslant v_n\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{M_n(0,1,0) \leqslant \frac{x+\gamma-\sqrt{2\gamma}\,z}{\alpha_n} + \beta_n\right\} = \exp\left\{-e^{-\left(x+\gamma-\sqrt{2\gamma}\,z\right)}\right\}.$$

Тогда из теоремы 1.5.1 (см. Leadbetter et al. (1983), стр. 13) следует, что

$$n\left(1-\Phi(v_n)\right) \to e^{-\left(x+\gamma-\sqrt{2\gamma}\,z\right)}.$$

Тогда из (30) следует

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{M_n(c_i,d_i,0)\leqslant v_n\}\right) \to \prod_{i=1}^{k}\exp\left\{-(d_i-c_i)\,e^{-\left(x+\gamma-\sqrt{2\gamma}\,z\right)}\right\}, \quad n\to\infty.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости при переходе по $n\to\infty$ в (28) имеем

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{M_n\left((c_i,d_i,\rho_n]\right)\leqslant u_n\}\right) \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\exp\left\{-(d_i-c_i)\,e^{-\left(x+\gamma-\sqrt{2\gamma}\,z\right)}\right\}\varphi(z)\,dz.$$

Осталось заметить, что правая часть совпадает с $\mathsf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}\{N\left((c_i,d_i]\right)=0\}\right)$, и сходимость (27) доказана. (24) следует из (25), (26) и (27). В силу теоремы Калленберга (см. теорема A.1. Leadbetter et al. (1983), стр. 309) имеет место сходимость по распределению последовательности точечных процессов

$$N_n \xrightarrow{d} N.$$

Событие $\{M_n^* \leqslant u_n\} = \{M_n(0,1)\leqslant u_n\}$ означает, что на полуинтервале $(0,1]$ превышения процессом η_n уровня u_n не произошло. Таким образом, при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{M_n^*\leqslant u_n\} = \mathsf{P}\{N_n\left((0,1]\right)=0\} \to$$

$$\to \mathsf{P}\{N\left((0,1]\right)=0\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\,z}\right\}\varphi(z)\,dz.$$

□

6. Доказательство теоремы 2

Доказательство.

В доказательстве используется лемма 3 и леммы 2, 3, 4 из работы Savinov (2015).

Без ограничения общности можно считать, что вероятностное пространство $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathsf{P}_0\}$ есть $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$, и

$$X_i^{(n)} = \Phi^{-1}\left(X_{i,n}^*\right). \tag{31}$$

Обозначим

$$M_n := \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i^{(n)}. \tag{32}$$

Далее будем использовать обозначения

$$a_i(n) := \frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}, \quad b_i(n) := \zeta_{i,n},$$

$$a_*(n) := \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}, \quad a^*(n) := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}}, \quad b^*(n) := \max_{1\leqslant i\leqslant n} \zeta_{i,n},$$

$$d(n) := a_*(n)\mathbf{1}_{\{b^*(n)\geqslant 0\}} + a^*(n)\mathbf{1}_{\{b^*(n)<0\}},\ e(n) := a^*(n)\mathbf{1}_{\{b^*(n)\geqslant 0\}} + a_*(n)\mathbf{1}_{\{b^*(n)<0\}},$$

где $\zeta_{i,n}$ определены в (7) из работы Savinov (2015).

Поскольку μ-п.н. $a_*(n) > 0$ (см. лемма 3, п. 2 в Savinov (2015)) и μ-п.н.

$$d(n)b^*(n) \leqslant M_n \leqslant e(n)b^*(n),$$

(см. лемма 4 в Savinov (2015)), то μ-п.н.

$$\alpha_n \left[d(n)b^*(n) - \beta_n\right] \leqslant \alpha_n\big(M_n - \beta_n\big) \leqslant \alpha_n \left[e(n)b^*(n) - \beta_n\right]. \tag{33}$$

Заметим (см. лемма 3, п. 3 в Savinov (2015)), что μ-п.н. $a_*(n) \to 1$, $a^*(n) \to 1$, поэтому ввиду

$$a_*(n) \leqslant d(n) \leqslant a^*(n), \quad a_*(n) \leqslant e(n) \leqslant a^*(n),$$

имеем

$$d(n) \to 1, \quad e(n) \to 1, \quad \mu - \text{a.s.} \tag{34}$$

Рассмотрим левую часть неравенства (33)

$$\alpha_n \left[d(n)b^*(n) - \beta_n\right] = d(n)\alpha_n \left[b^*(n) - \beta_n\right] + \alpha_n\beta_n \left[d(n) - 1\right]. \tag{35}$$

Известно (см. доказательство теоремы 1 в Savinov (2015)), что случайные величины $\zeta_{i,n},\ i = 1, 2, \ldots, n$ совместно гауссовские с ковариациями

$$cov\big(\zeta_{i,n}, \zeta_{j,n}\big) = c_{ij}^{(n)}.$$

Поэтому в силу (34) и леммы 3 для всех $x \in \mathbb{R}$

$$\mu\big\{d(n)\alpha_n \left[b^*(n) - \beta_n\right] \leqslant x\big\} \to \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\,z}\right\} \varphi(z)\, dz. \tag{36}$$

Воспользуемся ранее полученными результатами. Замечая, что для $n \geqslant 2$

$$\alpha_n \beta_n = 2 \ln n - \frac{1}{2} (\ln \ln n + \ln 4\pi) > 0,$$

μ-п.н. (см. лемма 3, п. 1 в Savinov (2015))

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_n A^{(n)} \leqslant \alpha_n \beta_n \left[a_*(n) - 1\right] \leqslant & \\ & \leqslant \alpha_n \beta_n \left[d(n) - 1\right] \leqslant \\ & \qquad \leqslant \alpha_n \beta_n \left[a^*(n) - 1\right] \leqslant \alpha_n \beta_n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Таким образом, (см. лемма 2, п. 2, 3 в Savinov (2015)) μ-п.н. $\alpha_n \beta_n \left[d(n) - 1\right] \to 0$, откуда с учетом (35) и (36)

$$\mu\Big\{\alpha_n \left[d(n) b^*(n) - \beta_n\right] \leqslant x\Big\} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-e^{-x-\gamma+\sqrt{2\gamma}\, z}\Big\} \varphi(z)\, dz.$$

Сходимость в правой части (33) доказывается аналогично, откуда и следует утверждение теоремы. ☐

7. Заключение

Смеси распределений широко изучаются в различных контекстах, например, в таких как теория надежности, а также в других подобных случаях, когда мы имеем дело с группой наблюдений, состоящей из разнородных подгрупп. Как следует из настоящей работы, применяя методы оценки условных функций распределения и используя CI-преобразование, можно построить некоторый критерий согласия выборки с гауссовской смесью, пока, правда, в относительно частном случае семейства стьюдентовских распределений. Кроме того, было показано, что максимальные компоненты элементов преобразованной многомерной выборки из такой гауссовской смеси ведут себя аналогично тем же максимальным компонентам элементов преобразованной многомерной гауссовской выборки.

Литература

Goldaeva, A.A., Lebedev, A.V., 2018. On extremal indices greater than one for a scheme of series. Lithuanian Mathematical Journal 58, 384–398. doi:10.1007/s10986-018-9407-2.

Heinen, A., Valdesogo, A., 2020. Spearman rank correlation of the bivariate student t and scale mixtures of normal distributions. J. of Multivariate Analysis 179, 104650. doi:10.1016/j.jmva.2020.104650.

Hsing, T., Husler, J., Reiss, R.D., 1996. The extremes of a triangular array of normal random variables. The Annals of Applied Probability 6, 671–686. doi:10.1023/A:1009968210349.

Kotz, S., Nadarajah, S., 2004. Multivariate t Distributions and Their Applications. Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511550683.

Leadbetter, M., Lindgren, G., Rootzen, H., 1983. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York. doi:10.1007/978-1-4612-5449-2.

Lebedev, A.V., 2015. Extremal indices in a series scheme and their applications (in russian). Informatics and Applications 9, 39–54. doi:10.14357/19922264150305.

Mittal Y., Y.D., 1975. Limit distributions for the maxima of stationary gaussian processes. Stochastic Process. Appl. 3, 1–18.

Nelsen, R., 2006. An Introduction to Copulas. Second ed., Springer-Verlag, New York. doi:10.1007/0-387-28678-0.

Savinov, E., Shamraeva, V., 2023. On a rosenblatt-type transformation of multivariate copulas. Econometrics and Statistics 25, 39–48. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2452306221001313, doi:https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2021.10.016.

Savinov, E.A., 2015. Limit theorem for maximum of random variables with copulas which are it-copulas of student's t-distribution. Theory Probab. Appl. 59, 508–516. doi:10.1137/S0040585X97T987260.