

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 16, стр. 144–144 (2019)*

УДК 514.752.43,

517.977.55

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

MSC 53A05,

49M41

**ПОСТРОЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО МНОЖЕСТВА ФУНКЦИИ  
ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА В КЛАССЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПО  
БЫСТРОДЕЙСТВИЮ: СЛУЧАЙ ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА С  
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ ГРАНИЦЫ**

А.А. Успенский, П.Д. Лебедев

**ABSTRACT.** We study the problem of constructing a non-smooth solution for a class of spatial time-optimal control problems in the case of a three-dimensional non-convex target set  $M$  with a smooth boundary  $S$ . A singular set (the so-called scattering surface) is constructed, on which the optimal result function loses smoothness. For an analytical description of the singularities of the solution, pseudo vertices are introduced, which are characteristic points of the surface  $S$ , which are responsible for the occurrence of singularities. The extreme points of the scattering surface, which define its boundary, are studied. A formula is found for the extreme points of the singular set in the case when the pseudo vertices are elliptical points of the surface  $S$ . Necessary conditions for the existence of pseudo vertices are obtained in terms of the curvature of the normal section  $S$ . An example of constructing a solution to the speed control problem based on the obtained theoretical results is given.

**Keywords:** control problem, optimal result function, scattering surface, singular set, curvature, normal, pseudovertex.

---

LEBEDEV, P.D., USPENSKII, A.A. CONSTRUCTION OF A SINGULAR SET OF THE OPTIMAL RESULT FUNCTION IN THE CLASS OF SPATIAL PROBLEMS OF SPEED CONTROL: THE CASE OF A TARGET SET WITH POSITIVE GAUSSIAN CURVATURE OF THE BOUNDARY.

© 2015 ЛЕБЕДЕВ П.Д., УСПЕНСКИЙ А.А.

Исследование Лебедева П.Д. выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00105, <https://rscf.ru/project/19-11-00105/>.

*Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Разработка корректных процедур построения решений задач управления по быстродействию вызвана внутренними потребностями теории оптимального управления. При этом сфера применения этих процедур включает теории, с которыми оптимальное управление тесно переплетено. Алгоритмы оказываются востребованными, например, при построении обобщенных решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений Гамильтона–Якоби [1]. Изучаемый в настоящей работе класс задач управления непосредственно связан с эволюцией волновых фронтов в задачах геометрической оптики [2]. Следует подчеркнуть, что содержательные решения указанных выше теорий (функция оптимального результата в теории управления, минимаксное решение в теории уравнений Гамильтона–Якоби, обобщенный эйконал в геометрической оптике), как правило, являются негладкими функциями. Негладкость разрешающих конструкций служит объективной преградой для точного аналитического построения решений. Поэтому преобладающим направлением конструирования решений выступает вычислительный алгоритм см., например, [3, 4].

В статье исследуется проблема построения сингулярного множества функции оптимального результата в классе трехмерных задач управления по быстродействию для случая целевого множества с гладкой границей. Решение проблемы достигается комбинированным подходом, сочетающим теоретические результаты с вычислительными алгоритмами. В работе доказана теорема, устанавливающая соответствие между особыми точками границы целевого множества и крайними точками сингулярного множества. Теорема позволяет находить в аналитической форме границу сингулярной поверхности. Построение самой поверхности осуществляется численными методами. Комбинированный подход для выявления и построения сингулярных множеств ранее реализовывался авторами главным образом для плоских задач управления (например, [5, 6]). В настоящей работе накопленный опыт построения негладких решений задач динамической оптимизации развит и перенесен на трехмерные задачи.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть задано замкнутое, в общем случае невыпуклое, множество  $M \subset \mathbb{R}^3$ . Рассмотрим задачу быстродействия с динамикой

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} \in V(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^3,$$

$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $V(\mathbf{c}, r)$  представляет собой замкнутый шар в  $\mathbb{R}^3$  с центром в точке  $\mathbf{c}$  радиуса  $r > 0$ . Будем обозначать через  $u(\mathbf{x})$  функцию оптимального результата, то есть наименьшее время  $\tau$ , за которое решение одноточечной системы можно привести на целевое множество.

В теории оптимального управления для задачи быстродействия с динамикой (1) рассматривается уравнение Беллмана–Айзекса

$$(2) \quad \min_{(v_1, v_2, v_3) \in V(\mathbf{0}, 1)} \left( v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 1 = 0,$$

обобщенное (минимаксное) решение которого при граничном условии

$$(3) \quad u|_{\partial M} = 0$$

совпадает с функцией оптимального результата  $u = \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^3$ . Здесь  $\partial M$  — граница множества  $M$ .

Укажем родственную краевую задачу из геометрической оптики, рассмотрим уравнение эйконала

$$(4) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Фундаментальное (обобщенное) решение  $u = u_k(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus M$ , задачи Дирихле для уравнения (4) с краевым условием (3), введенное С.Н. Кружкову [2], совпадает с минимаксным решением краевой задачи уравнения (2), (3) по модулю, но имеет противоположный знак.

Если  $M$  — выпуклое множество, то сужение функции  $u(\mathbf{x})$  на дополнение множества  $M$  до всего пространства  $\mathbb{R}^3$  дифференцируемо. Если  $M$  — не выпуклое множество, то на  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  существует сингулярное множество, на котором функция оптимального результата теряет гладкость. Будем считать, что решение задачи быстрогодействия найдено, если построена карта поверхностей уровня  $\Phi(\tau) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : u(\mathbf{x}) = \tau\}$  при заданных моментах времени  $\tau \in (0, +\infty)$  и выделено множество их негладкости. С точки зрения геометрической оптики  $\Phi(\tau)$  можно рассматривать как волновые фронты, идущие от множества  $M$  в среде, описываемой уравнением (4).

В дальнейшем сосредоточимся на проблеме построения сингулярного множества решения задачи (2), (3), сделав акцент на выявлении аналитических взаимосвязей между точками сингулярности и краевым множеством.

Обозначим  $\Omega_M(\mathbf{x})$  множество ближайших в евклидовой метрике точек к  $\mathbf{x}$  на множестве  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

**Определение 1.** [7] *Множество*

$$(5) \quad L(M) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) > 1\}$$

*называется биссектрисой замкнутого непустого множества  $M$ ,  $\text{card } \Omega_M(\mathbf{x})$  означает мощность множества  $\Omega_M(\mathbf{x})$ .*

Биссектриса является частным случаем множества симметрии, на котором волновые фронты [8] теряют гладкость. Подробнее свойства множеств симметрии приведены, например, в работе [9]. Качественные особенности множеств негладкости волновых фронтов в евклидовых пространствах небольшой размерности описаны в [10]. Гладкость обобщенного (согласно той или иной концепции) решения задачи Дирихле (3) для уравнения эйконала (4) находится в зависимости от геометрии краевого множества и свойств оператора метрической проекции на краевое множество. В частности, если этот оператор имеет сугубо одноэлементные значения, т.е. когда  $\text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) = 1$  для всех  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus M$ , то и минимаксное (по А.И. Субботину) и фундаментальное (по С.Н. Кружкову) решения, которые отличны друг от друга только знаком, являются дифференцируемыми функциями (см. обзор [11]). Заметим, что одноэлементность значений оператора метрической проекции реализуется в случае выпуклости краевого множества. В настоящей работе исследуется случай, когда краевое множество  $M$  может быть и невыпуклым, что влечет зарождение сингулярного множества (биссектрисы  $L(M)$ ) и необходимость разработки аналитических, численных или комбинированных алгоритмов его построения.

С точки зрения теории оптимального управления биссектриса  $L(M)$  есть рассеивающая поверхность [12, Пример 6.10.1] в задаче быстрогодействия с динамикой (1) и целевым множеством  $M$ . Это означает, что из каждой её точки выходит как минимум две оптимальные траектории, направленные в разные стороны от поверхности, — отрезки  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}_i], i = \overline{1, k}$ , где  $\mathbf{y}_i \in \Omega_M(\mathbf{x}), k = \text{card } \Omega_M(\mathbf{x})$ . В задаче Дирихле для уравнения (2) с краевым условием (3) данные отрезки являются характеристиками [1], проходящими через точку  $\mathbf{x}$ . Сужение решения  $u(\mathbf{x})$  на множество  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  является функцией, дифференцируемой всюду, кроме множества  $L(M)$ . При этом в точках  $\mathbf{x} \in L(M)$  определен супердифференциал  $D^+u(\mathbf{x}) = \text{co} \left\{ \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_i\|} : \mathbf{y}_i \in \Omega_M(\mathbf{x}) \right\}$ , где  $\text{co } Y$  — выпуклая оболочка множества  $Y$  (подробнее см [13, гл. II, § 8]). Супердифференциал  $D^+u(\mathbf{x})$  используется в [14] для доказательства того, что сужение функции  $u(\mathbf{x})$  на множестве  $\mathbb{R}^3 \setminus M$  является минимаксным решением краевой задачи (2), (3).

**Определение 2.** [14] Несовпадающие точки  $\widehat{\mathbf{y}}_i \in M$  и  $\bar{\mathbf{y}}_i \in M$  называются квази-симметричными, если

$$\exists \mathbf{x} \in L(M) : \{\widehat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x}).$$

Точка  $\mathbf{x} \in L(M)$  в этом случае называется точкой, порожденной парой  $\widehat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i$ .

**Определение 3.** [7] Точка  $\mathbf{y}_0 \in M$  называется псевдовершиной множества  $M$ , если существуют последовательность  $\{\widehat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset M$  пар несовпадающих точек и последовательность  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L(M)$ , для которых выполнены условия

$$(6) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \{\widehat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x}_i)$$

и

$$(7) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (\widehat{\mathbf{y}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0).$$

Если существует конечный предел

$$(8) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0,$$

то  $\mathbf{x}_0$  называется крайней точкой биссектрисы, соответствующей псевдовершине  $\mathbf{y}_0$ .

Поскольку отображение  $\mathbf{x} \mapsto \Omega_M(\mathbf{x})$  полунепрерывно сверху (см. [7, стр. 111]), то псевдовершина  $\mathbf{y}_0$  является ближайшей на множестве  $M$  для крайней точки  $\mathbf{x}_0$ , и выполняется включение

$$(9) \quad \mathbf{y}_0 \in \Omega_M(\mathbf{x}_0).$$

Заметим, что крайняя точка, соответствующая псевдовершине, не обязательно является ближайшим к  $\mathbf{y}_0$  элементом на замыкании  $\text{cl } L(M)$  сингулярного множества  $L(M)$ . Возможны случаи, когда одной псевдовершине соответствуют две различные крайние точки, находящиеся на разном расстоянии, как в [5, пример 4.1].

## 3. СИНГУЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Ограничимся рассмотрением случая, когда граница множества  $M$  есть гладкая поверхность  $S$ , совпадающая с годографом дважды дифференцируемой вектор-функции двух переменных  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1, t_2)$  с областью определения  $(t_1, t_2) \in T \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Основные инварианты в точке  $\mathbf{y} \in S$  — это

- $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  — единичный вектор нормали в точке  $\mathbf{y}$  к поверхности  $S$ ;
- $k_1(\mathbf{y})$  и  $k_2(\mathbf{y})$  — главные кривизны в точке  $\mathbf{y}$ ;
- $\mathbf{e}_1(\mathbf{y})$  и  $\mathbf{e}_2(\mathbf{y})$  — вектора, задающие направления главных сечений в точке

$\mathbf{y}$ .

Обозначим  $\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{y})$  плоскость, проходящую через точку  $\mathbf{y}$  параллельно векторам  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  и  $\mathbf{e}$ . Кривая  $\Gamma_i$ , полученная сечением поверхности  $S$  плоскостью  $\pi_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{y})$ , имеет в точке  $\mathbf{y}$  кривизну  $k_i(\mathbf{y})$ ,  $i = 1, 2$ . Величина  $k(\mathbf{y}) = k_1(\mathbf{y}) \cdot k_2(\mathbf{y})$  называется гауссовой кривизной поверхности в точке  $\mathbf{y} \in S$ . Подробнее инварианты поверхности описаны, например, в [15].

Полагаем без ограничения общности что выполняется оценка

$$(10) \quad |k_1(\mathbf{y})| \geq |k_2(\mathbf{y})|.$$

**Теорема 1.** Пусть крайняя точка  $\mathbf{x}_0$  соответствует псевдовершине  $\mathbf{y}_0 \in S$  и для главных кривизн в ней справедливо неравенство (10). Если

$$(11) \quad k(\mathbf{y}_0) > 0,$$

то справедливо равенство

$$(12) \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 + k_1^{-1}(\mathbf{y}_0)\mathbf{n}(\mathbf{y}_0).$$

*Доказательство.* Без ограничения общности полагаем, что система координат выбрана так, что  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ , ось абсцисс совпадает с направлением вектора  $\mathbf{e}_1(\mathbf{y}_0)$ , а ось ординат — с направлением вектора  $\mathbf{e}_2(\mathbf{y}_0)$ . Тогда координаты крайней точки могут быть записаны как  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, z_0)$ . Условие (11) означает, что  $\mathbf{y}_0$  — эллиптическая точка, то есть поверхность  $S$  локально строго выпукла в одну сторону (в некоторой окрестности  $\mathbf{y}_0$ ). Без ограничения общности полагаем, что направление выпуклости направлено в положительную сторону оси аппликат. Это означает, что в достаточно малой окрестности псевдовершины точка пересечения нормалей находится со стороны положительного направления оси аппликат, а значит

$$(13) \quad z_0 > 0.$$

Покажем, что справедливо

$$(14) \quad z_0 \leq k_1(\mathbf{y}_0)^{-1}.$$

Допустим, что (14) не выполняется. Рассмотрим нормальное сечение  $\Gamma_1$  поверхности  $S$  плоскостью  $\pi_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{y}_0)$ . Кривая  $\Gamma_1$  в плоскости  $\pi_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{y}_0)$  имеет радиус кривизны в точке  $\mathbf{y}_0$  равный  $R_1 = |k_1(\mathbf{y})|^{-1}$ . Поэтому она заходит внутрь круга радиуса  $R = z_p > R_1$  с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ , а значит  $\mathbf{y}_0 \notin \Omega_M(\mathbf{x}_0)$ . Следовательно,  $\mathbf{x}_0$  не может быть крайней точкой, порожденной псевдовершиной  $\mathbf{y}_0$ , в силу (9). Получилось противоречие.

Покажем, что справедливо неравенство

$$(15) \quad |z_0| \geq |k_1(\mathbf{y}_0)|^{-1}.$$

Для этого рассмотрим последовательность из треугольников  $\Delta_i = \Delta \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , точки которых удовлетворяют условиям (6)–(8). По построению все треугольники  $\Delta_i$  равнобедренные, причем равные стороны примыкают к вершине  $\mathbf{x}_i$ . Согласно теореме синусов

$$\frac{\|\widehat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{\sin(\angle \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}})} = \frac{\|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{\sin(\angle \mathbf{x}_i \widehat{\mathbf{y}}_i \bar{\mathbf{y}})}.$$

Здесь  $\angle \mathbf{abc}$  означает положительную величину угла с вершиной в  $\mathbf{b}$  и сторонами  $\mathbf{ab}$  и  $\mathbf{bc}$ . Осуществим предельный переход:

$$(16) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| \sin(\angle \mathbf{x}_i \widehat{\mathbf{y}}_i \bar{\mathbf{y}})}{\sin(\angle \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}})}.$$

Из (7) следует, что длина стороны  $\widehat{\mathbf{y}}_i \bar{\mathbf{y}}_i$  в пределе стремится к нулю, а значит

$$(17) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \angle \mathbf{x}_i \widehat{\mathbf{y}}_i \bar{\mathbf{y}} = \pi/2.$$

Из (16) и (17) следует

$$(18) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| \sin(\pi/2)}{\sin(\angle \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}})} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{\sin(\angle \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}})}.$$

При этом поскольку

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{0},$$

то

$$(19) \quad \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\widehat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{\sin(\angle \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}})}.$$

Оценим значение угла  $\angle \widehat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}}_i$ . В окрестности точки  $\mathbf{y}_0$  поверхность  $S$  может быть представлена в виде графика функции

$$(20) \quad f(x, y) = \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 + o(x^2 + y^2),$$

полином  $\frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2$  задает график так называемого соприкасающегося параболоида [16, с. 443–446] поверхности  $S$ . Здесь  $o(t)$  означает такую функцию, что  $\lim_{t \rightarrow 0} o(t)t^{-1} = 0$ . Соответственно частные производные функции (20) в окрестности точки  $(x, y) = (0, 0)$  могут быть представлены в виде

$$(21) \quad f'_x(x, y) = k_1x + o(x) + o(y),$$

$$(22) \quad f'_y(x, y) = k_2y + o(x) + o(y).$$

Вектора единичных нормалей в точках  $\widehat{\mathbf{y}}_i = (\widehat{x}_i, \widehat{y}_i, f(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i))$  и  $\bar{\mathbf{y}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, f(\bar{x}_i, \bar{y}_i))$  в окрестности псевдовершины равны

$$(23) \quad \mathbf{n}(\widehat{\mathbf{y}}_i) = \frac{(-f'_x(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), -f'_y(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), 1)}{\sqrt{f'_x(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)^2 + f'_y(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i)^2 + 1}},$$

$$(24) \quad \mathbf{n}(\bar{\mathbf{y}}_i) = \frac{(-f'_x(\bar{x}_i, \bar{y}_i), -f'_y(\bar{x}_i, \bar{y}_i), 1)}{\sqrt{f'_x(\bar{x}_i, \bar{y}_i)^2 + f'_y(\bar{x}_i, \bar{y}_i)^2 + 1}}.$$

Рассмотрим треугольники  $\Delta \mathbf{n}^*(\widehat{\mathbf{y}}_i) \mathbf{0} \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)$ , где

$$(25) \quad \mathbf{n}^*(\widehat{\mathbf{y}}_i) = (-f'_x(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), -f'_y(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i), 1)$$

$$(26) \quad \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i) = (-f'_x(\bar{x}_i, \bar{y}_i), -f'_y(\bar{x}_i, \bar{y}_i), 1).$$

Вектора (25) и (26) сонаправлены единичным нормальям (23) и (24). Поэтому

$$(27) \quad \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \wedge \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i) = \mathbf{n}(\hat{\mathbf{y}}_i) \wedge \mathbf{n}(\bar{\mathbf{y}}_i) = \angle \hat{\mathbf{y}}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{y}}_i.$$

Здесь  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  означает неотрицательный угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Согласно теореме синусов

$$(28) \quad \frac{\|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) - \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)\|}{\sin(\angle \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \wedge \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i))} = \frac{\|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i)\|}{\sin(\angle \mathbf{0} \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i))}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) - \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)\| &= 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i)\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)\| = 1, \end{aligned}$$

то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sin(\angle \mathbf{0} \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sin(\angle \mathbf{0} \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i) \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i)) = 1.$$

Поэтому из равенства (28) следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) - \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)\|}{\sin(\angle \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \wedge \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i))} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i)\|}{\sin(\angle \mathbf{0} \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i))} = 1.$$

Из представлений (21), (22), и неравенства (10) вытекает оценка в окрестности псевдовершины:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) - \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)\| &= \sqrt{(f'_x(\hat{x}_i, \hat{y}_i) - f'_x(\bar{x}_i, \bar{y}_i))^2 + (f'_y(\hat{x}_i, \hat{y}_i) - f'_y(\bar{x}_i, \bar{y}_i))^2} = \\ &= \sqrt{(k_1(\hat{x}_i + o(\hat{x}_i)) - k_1(\bar{x}_i + o(\bar{x}_i)))^2 + (k_2(\hat{y}_i + o(\hat{y}_i)) - k_2(\bar{y}_i + o(\bar{y}_i)))^2} = \\ &= \sqrt{(k_1(\hat{x}_i - \bar{x}_i) + o(\hat{x}_i - \bar{x}_i))^2 + (k_2(\hat{y}_i - \bar{y}_i) + o(\hat{y}_i - \bar{y}_i))^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(k_1(\hat{x}_i - \bar{x}_i) + o(\hat{x}_i - \bar{x}_i))^2 + (k_1(\hat{y}_i - \bar{y}_i) + o(\hat{y}_i - \bar{y}_i))^2} = \\ &= \sqrt{k_1^2((\hat{x}_i - \bar{x}_i)^2 + (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2) + o(\hat{x}_i - \bar{x}_i)^2 + o(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2} = \\ (29) \quad &= k_1 \sqrt{\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|^2 + o(\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|^2)} = k_1 \|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| + o(\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|). \end{aligned}$$

Для нормы крайней точки, вычисленной согласно (19), из равенств (27) и неравенства (29) следует

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_0\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{\sin(\angle \mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) \wedge \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i))} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{\|\mathbf{n}^*(\hat{\mathbf{y}}_i) - \mathbf{n}^*(\bar{\mathbf{y}}_i)\|} \geq \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|}{k_1 \|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\| + o(\|\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_i\|)} = \frac{1}{k_1}. \end{aligned}$$

Значит, (15) выполняется.

Из неравенств (13)–(15) следует, что в принятой системе координат справедливо равенство

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, k_1^{-1}),$$

что совпадает с формулой (12).  $\square$

Заметим, что возможны принципиально другие случаи расположения псевдовершин и соответствующих им крайних точек. Например, если

$$(30) \quad k(\mathbf{y}_0) < 0,$$

то могут существовать две различные крайние точки  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^*$ , порожденные одной псевдовершиной  $\mathbf{y}_0$ . Они обе лежат на нормали к  $S$  в точке  $\mathbf{y}_0$ , но по разные стороны от нее. Это обусловлено тем, что точки, для которых верно (30), являются гиперболическими, разные нормальные сечения в них выпуклы в разные стороны. Также возможен вырожденный случай точки  $\mathbf{y}_0$ , в которой

$$k(\mathbf{y}_0) = 0,$$

здесь  $\mathbf{y}_0$  — параболическая точка. Есть все основания считать, что для них формула (12) тоже выполняется (за исключением точек уплощения, в которых обе главные кривизны обращаются в нуль). Однако строгое доказательство этого факта гораздо сложнее, чем для параболических точек, поскольку в параболических точках поверхность может не быть локально выпуклой в одну сторону.

**Следствие 1.** Пусть для главных кривизн в псевдовершине  $\mathbf{y}_0 \in S$  справедливо (10). Если выполняется (11), то кривизна нормального сечения  $\Gamma_1 = \pi_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{y}_0) \cap S$  достигает в точке  $\mathbf{y}_0$  локального максимума.

*Доказательство.* Согласно теореме 1 крайняя точка биссектрисы, соответствующая псевдовершине  $\mathbf{y}_0 \in S$ , определяется по формуле (12). Из (9) следует, что

$$(31) \quad \mathbf{y}_0 \in \Omega_{\Gamma_1}(\mathbf{x}_0),$$

поскольку  $\Gamma_1 \subset S$ . В то же время если рассмотреть плоскость  $\pi_{\mathbf{e}_1}(\mathbf{y}_0)$ , то  $\mathbf{x}_0$  является на ней центром кривизны кривой  $\Gamma_1$  в точке  $\mathbf{y}_0 \in \Gamma_1$ . При этом если в целом  $\Gamma_1$  может содержать особые точки, то в окрестности  $\mathbf{y}_0$  она является регулярной. Точка  $\mathbf{x}_0$  является центром соприкасающейся окружности  $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0, k_1^{-1}(\mathbf{y}_0))$  к  $\Gamma_1$  в точке  $\mathbf{y}_0$ . Если кривизна  $k$  кривой  $\Gamma_1$  в  $\mathbf{y}_0$  возрастает или убывает (при произвольной параметризации), то  $\Gamma_1$  переходит с одной стороны  $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0, k_1^{-1}(\mathbf{y}_0))$  на другую. Если кривизна  $k$  кривой  $\Gamma_1$  в  $\mathbf{y}_0$  достигает локального минимума, то  $\Gamma_1$  с обеих сторон заходит внутрь круга. В обоих случаях на  $\Gamma_1$  есть точки, которые лежат ближе к  $\mathbf{x}_0$ , чем  $\mathbf{y}_0$ . Значит, (31) выполняется только если в  $\mathbf{y}_0$  кривизна  $k$  кривой  $\Gamma_1$  достигает локального максимума, возможно не строго.  $\square$

Заметим, что если в псевдовершине  $\mathbf{y}_0$  имеет место равенство  $k_1(\mathbf{y}_0) = k_2(\mathbf{y}_0)$ , то все нормальные сечения поверхности  $S$  в ней должны иметь локальный максимум кривизны. Подобные точки называются омбилическими или точками округления.

#### 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Пусть для задачи быстрого действия (1) в качестве целевого множества  $M$  задан подграфик функции

$$(32) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

с областью определения  $\mathbb{R}^2$ . Требуется построить карту поверхностей уровня, выделив сингулярное множество  $L(M)$ . Ограничивающая множество  $M$  поверхность  $S$  может быть представлена как годограф вектор-функции

$$\mathbf{r}(t_1, t_2) = (t_1, t_2, t_1^4 + 2t_1^2 t_2^2 + t_2^4), t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

График функции (32) является алгебраической поверхностью 4 порядка, а точнее поверхностью вращения параболы 4 степени. У нее есть ось симметрии, совпадающая с осью аппликат.

Анализ поверхности  $S$  как графика функции (32) показывает, что псевдовершины на ней лежат на окружности

$$(33) \quad O^* = \left\{ (\lambda \cos t, \lambda \sin t, \lambda^4) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, \pi], \lambda = 56^{-1/6} \right\}.$$

Поскольку все точки поверхности  $S$  являются эллиптическими (за исключением  $(0, 0, 0)$ , в которой обе главные кривизны обращаются в нуль), то во всех псевдовершинах выполняются условия теоремы 1. Для значения кривизны нормального сечения  $\pi_{e_1}(\mathbf{y}_0)$ ,  $\mathbf{y}_0 \in O^*$ , выполняется следствие 1.

Сингулярное множество  $L(M)$  состоит из поверхности вращения, край которого состоит из крайних точек, соответствующих псевдовершинам множества  $M$ , и луча, лежащего на оси аппликат. Координаты начала луча  $(0, 0, 0.9449)$ . Построенные численными методами аппроксимации поверхностей уровня функции оптимального результата  $\Phi(0.546)$  и  $\Phi(1.023)$  (красным цветом), сингулярное множество  $L(M)$  (синим цветом), поверхность  $S$  (зеленым цветом) и множество псевдовершин (33) (фиолетовой линией) показаны на рис. 1 и 2 (в разрезе плоскость  $yOz$ ). Заметим, что волновой фронт  $\Phi(0.546)$  имеет негладкую особенность в виде окружности, по которой он пересекается с биссектрисой, а фронт  $\Phi(1.023)$  — в виде одной точки.

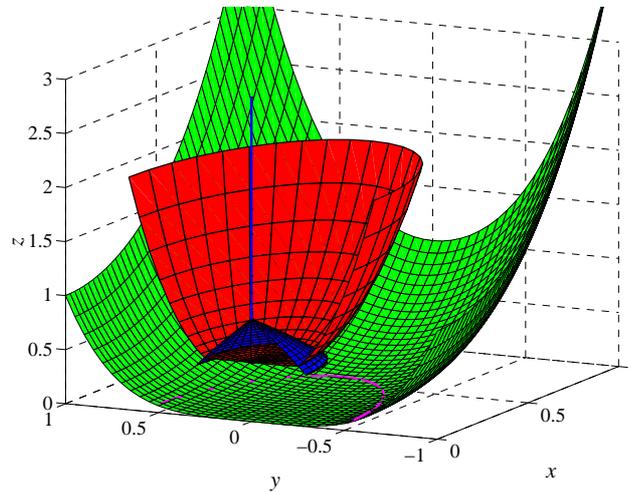


Рис. 1. Поверхность  $S$ , и аппроксимации сингулярного множества  $L(M)$ , множества псевдовершин  $O^*$  и волнового фронта  $\Phi(0.546)$ .

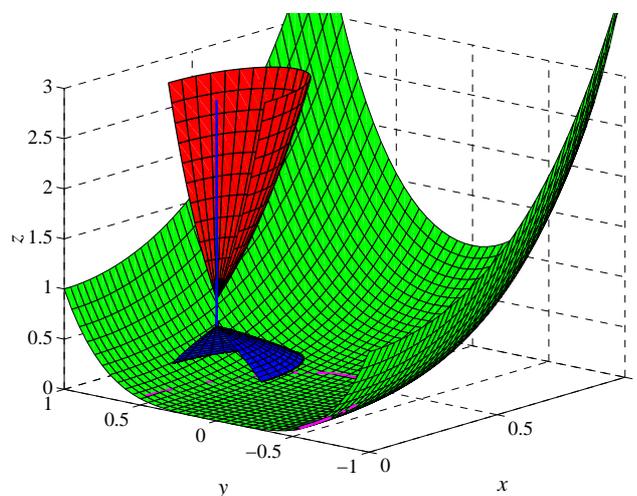


Рис. 2. Поверхность  $S$ , и аппроксимации сингулярное множество  $L(M)$ , множества псевдовершин  $O^*$  и волнового фронта  $\Phi(1.023)$ .

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках исследования задачи управления по быстродействию с шаровой вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством  $M$  с гладкой границей  $S$  доказана формула крайней точки сингулярного множества, порожденной псевдовершиной, — эллиптической точкой поверхности целевого множества. Установлены необходимые условия существования псевдовершины в терминах кривизны нормального сечения поверхности  $S$ . Полученные результаты представляют собой экстраполяцию в трехмерное пространство теорем о свойствах псевдовершин плоских множеств [17]. Результаты позволяют раскрыть нетривиальную геометрию сингулярных множеств в классе пространственных задач оптимального управления и является важным шагом в переходе при рассмотрении в качестве целевого множества от пространственной кривой [18] к поверхности. Для построения сингулярного множества модернизирован программный комплекс [19], использовавшийся ранее для решения плоских задач управления.

## REFERENCES

- [1] A.I. Subbotin, *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. XII+314 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
- [2] S.N. Kruzhkov, *Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions*, Mathematics of the USSR–Sbornik, **27**:3 (1975), 406–446. <https://doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522>
- [3] G.V. Papakov, A.M. Tarasiev, A.A. Uspenskii, *Numerical approximations of generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations* Applied Mathematics and Mechanics. **60**:4 (1996), 570–581.

- [4] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko, *Numerical solution eikonal equation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 28–34.
- [5] P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, *Construction of scattering curves in one class of timeoptimal control problems with the curvature jumps on the boundary of the target set* [in Russian], Izv. Inst. Mat. Inform., Udmurt. Gos. Univ. **55** (2020), 93–112.
- [6] A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev, *Properties of non stationer pseudo vertex with the break of smoothness of the target set boarder curvature in the Dirichlet problem to eikonal type equation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 2028–2044.
- [7] P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, *Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the boundary of the target set*, [in Russian], Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **25**:1 (2019), 108–119.
- [8] V.I. Arnold, *Singularities of caustics and wave fronts*, Dordrecht: Springer, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2>
- [9] J. Sotomayor, D. Siersma, and R. Garcia, *Curvatures of conflict surfaces in Euclidean 3-space*, Geometry and Topology of Caustics, ed. S. Janeczko and V. M. Zakalyukin, Banach Center Publications. Warsaw, **50** (1999), 277–285.
- [10] V.D. Sedykh, *Topology of singularities of a stable real caustic germ of type E6*, Izv. Math., **82**:3 (2018), 596–611.
- [11] A.R. Alimov, I.G. Tsar'kov, *Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation*, Russian Math. Surveys, **71**:1 (2016), 1–77.
- [12] R. Isaacs, *Differential games*, N.Y.: John Wiley and Sons, 1965.
- [13] V. F. Dem'yanov and L. V. Vasil'ev, *Nondifferentiable Optimization*, Springer, Berlin etc., 1985.
- [14] P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, *Analytical and numerical construction of the optimal outcome function for a class of time-optimal problems*, Computational Mathematics and Modeling. **19**:4 (2008), 375–386.
- [15] Manfredo P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Institute de Matemtica Pura e Aplicada Pura e Aplicada (IMPA) RRio de Janeiro, Brazil Prentice-Hatt, Inc., Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1976.
- [16] A.D. Aleksandrov, N.Yu. Netsvetaev, *Differential geometry*, Moscow, Nauka, 1990.
- [17] A.A. Uspenskii, *Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem*, Proc. Steklov Inst. Math. **291**:1 (2015), 239–254.
- [18] A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev, *On the structure of the singular set of solutions in one class of 3D time-optimal control problems*, [in Russian], Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki. **31**:3 (2021), 471–486.
- [19] P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii, *Program for constructing wave fronts and functions of the Euclidean distance to a compact nonconvex set*, Certificate of state registration of the computer program no. 2017662074, October 27, 2017.

LEBEDEV PAVEL DMITRIEVICH  
 INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS, URAL BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY  
 OF SCIENCES,  
 S. KOVALEVSKAYA STR., 16,  
 YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA  
 E-mail address: [pleb@yandex.ru](mailto:pleb@yandex.ru)

USPENSKII ALEXANDER ALEXANDROVICH  
 INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS, URAL BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY  
 OF SCIENCES,  
 S. KOVALEVSKAYA STR., 16,  
 YEKATERINBURG, 620990, RUSSIA  
 E-mail address: [uspen@imm.uran.ru](mailto:uspen@imm.uran.ru)