

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ГИПЕРУПРУГОГО ТЕЛА  
С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙА.И. ФУРЦЕВ 

**Abstract:** The paper deals with a solid body containing a rigid inclusion with a crack on its boundary. This body is assumed to be hyperelastic; therefore, we describe it within the framework of finite-strain theory. Moreover, we implement a non-interpenetration condition, which does not allow the opposite crack faces to penetrate each other. The main object of our research is energy minimization corresponding to the problem of equilibrium for the described body. By the use of variational methods, it is shown that this problem has a solution. Then we discuss a boundary value problem that is satisfied by the equilibrium solution.

**Keywords:** crack, rigid inclusion, non-interpenetration condition, contact, hyperelastic material, finite-strain elasticity, energy minimization

---

FURTSEV, A.I., PROBLEM OF EQUILIBRIUM FOR HYPERELASTIC BODY WITH RIGID INCLUSION AND CRACK.

© 2023 ФУРЦЕВ А.И.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

## Введение

В современном мире при создании прочных, легких и износостойких конструкций, использующихся в различных сферах жизни, широко применяются композиционные материалы. Они востребованы во многих отраслях промышленности и строительства, в которых внедрение новых материалов с улучшенными характеристиками играет существенную роль. Композиты часто изготавливают с использованием волокон, связующим веществом для которых служат полимеры. При деформировании композитов волокна и связующее вещество могут проявлять различное поведение: например, деформации связующего могут быть значительными, в то время как волокна, выполняющие роль подкрепляющих включений, могут быть изготовлены из жесткого материала. В связи с этим важное значение приобретает исследование математических моделей гиперупругих тел с инкорпорированными жесткими включениями. Достоинством этих моделей является то, что они позволяют описать сложный характер деформирования композиционного материала и при этом учесть контрастность отдельных компонент, составляющих его структуру.

Еще одним вызовом является моделирование композиционных материалов, когда в них между различными компонентами присутствуют трещины. Такие трещины могут возникнуть в результате износа, либо могут быть созданы целенаправленно (так бывает, например, при определенных технологиях разрезания материалов). Из сказанного следует, что актуальной является проблема исследования моделей гиперупругих тел с включениями, на границе которых имеются трещины. Одна из главных сложностей исследования подобных моделей обусловлена тем, что эти модели формулируются в виде математических задач, которые являются существенно нелинейными.

Стоит сказать, что за последние полтора десятилетия задачи о равновесии упругих тел с жесткими включениями и трещинами интенсивно изучались в постановках, формулируемых в рамках линейной теории упругости, в предположении малости деформаций. При таком подходе непроникание противоположных берегов трещины обеспечивается локальными краевыми условиями типа Синьорини на разрезе области, который соответствует трещине (см. [1]). В работах [9–11] для задач об объемных включениях и трещинах в подобной формулировке доказывались теоремы существования решений, проводился асимптотический анализ чувствительности решений к изменениям параметров жесткости и формы включений, изучались сопутствующие задачи оптимального управления. В дальнейшем существенное развитие получили задачи об упругих тел с тонкими включениями и трещинами, см., например, статьи [12–15]. В работах [16, 17] изучался вопрос чувствительности интегралов энергии к изменениям формы области для тел с жесткими включениями и трещинами. Численный анализ задач равновесия описанного

класса читатель может найти в [18, 19]. Также исследовались задачи о разнообразных жестких включениях с трещинами, расположенными в пластинах Кирхгофа-Лява и Тимошенко, см. [20–23].

В то же время, давно известной проблемой является проблема математического обоснования моделей нелинейно упругих тел с учетом их гетерогенности и возможного наличия трещин. Эта проблема, среди прочих открытых проблем математической теории упругости, обозначена в известных обзорных статьях [3, 4]. В противовес аналогичным задачам о линейно упругих телах, истинно нелинейные задачи об упругих включениях с трещинами и условиями непроникания, учитывающие большие деформации, на данный момент не подвергались систематическому математическому исследованию. В связи с этим отметим только ряд недавних работ, в которых исследовались задачи, близкие к исследуемым в нашей статье. Так, в последние годы в математическом сообществе изучалась проблема корректности математических моделей трещин в нелинейно упругих телах. Указанная проблема исследовалась в работах [24–32] и главным образом интересовала ученых в связи с вопросом распространения трещин. В частности, в работах [24, 25] рассмотрены нелинейные модели с поливыпуклыми функционалами энергии и изучен вопрос дифференцируемости функционалов по длине трещин. В работах [26–29] подробно изучался вопрос о квазистатическом росте трещин для моделей с невыпуклыми функционалами энергии. В перечисленных работах речь шла преимущественно о моделях, в которых помимо трещин в телах не предполагается наличие каких-либо включений. Наличие включений в телах с трещинами является дополнительной трудностью, поскольку в данном случае возникает вопрос, какие соотношения для описания включений применить. Еще более трудным является вопрос, возможно ли модели включений с трещинами на границе обосновать асимптотическими методами. В отношении этих вопросов читателю могут быть интересны работы о так называемых интерфейсах, представляющих собой тонкий слой материала между двумя другими материалами. Асимптотический анализ задач об интерфейсах в рамках моделей, имеющих отношение к нелинейной упругости, получил свое развитие как с помощью метода формальных асимптотических разложений (см., например, недавние работы [33–35] и ссылки оттуда), так и в контексте вариационной сходимости (в пример можно привести [36–39]). При этом, насколько известно автору, работы по математическому построению моделей нелинейно упругих тел с трещинами на границе включений, полностью инкорпорированных в окружающий материал, в настоящее время отсутствуют, поэтому нашу статью можно также считать предварительным шагом и в этом важном направлении.

Настоящая работа посвящена исследованию нелинейной задачи, которая описывает равновесие гиперупругого тела с жестким включением и трещиной и формулируется в виде задачи минимизации энергии на множестве допустимых конфигураций тела. Термин «жесткое включение» в

рамках рассматриваемой нами модели означает, что включение фактически является абсолютно твердым и целиком инкорпорировано в тело. Таким образом, рассматриваемое тело состоит из двух частей: жесткого включения и окружающей его гиперупругой среды, на части границы между которыми предполагается наличие трещины. При постановке задачи мы применяем оригинальные краевые условия, благодаря которым обеспечивается непроникание противоположных берегов трещины. Указанные условия являются односторонними ограничениями на заранее неизвестные положения точек тела и по своей природе нелокальны. В результате нелинейность изучаемой задачи заключается как в классических физической и геометрической нелинейностях, так и в наличии заранее неизвестных границ с условиями непроникания между берегами трещины.

Представленная статья состоит из трех параграфов. В первом параграфе приводится подробное описание математической формулировки рассматриваемой в статье задачи. Во втором параграфе доказывается теорема о существовании вариационных решений. И, наконец, в третьем параграфе обсуждается краевая задача, соотношениям которой при достаточной гладкости удовлетворяют вариационные решения, а также даются комментарии к механическому смыслу соотношений указанной краевой задачи.

## 1 Формулировка задачи равновесия

Здесь в виде вариационной задачи будет сформулирована задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной. В начале параграфа мы описываем геометрию задачи и вводим необходимые обозначения для искомых функций. Затем описываем ограничения на указанные функции. Далее вводим функционал энергии тела и рассматриваем задачу равновесия в виде задачи минимизации функционала энергии на множестве допустимых конфигураций тела.

Пусть в естественном (недеформированном) состоянии тело занимает ограниченную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ . Пусть строго внутри  $\Omega$  располагается подобласть  $\omega$ . Предполагаем, что  $\omega$  отвечает жесткому включению, а оставшаяся часть области  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  соответствует гиперупругой среде, окружающей включение. Описанную конфигурацию будем считать отсчетной, она изображена на Рис. 1. Для определения положения материальных точек в отсчетной конфигурации введем систему декартовых координат  $Ox_1x_2x_3$ . Обозначим через  $\nu$  вектор единичной нормали, определенный на  $\partial\omega$  и внешний по отношению к  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ .

Будем считать, что тело деформируется под действием известной внешней силы. Как результат, точки тела перемещаются, занимая новые положения. Указанные положения материальных точек будем считать неизвестными при формулировке задачи равновесия. Введем вектор-функции,

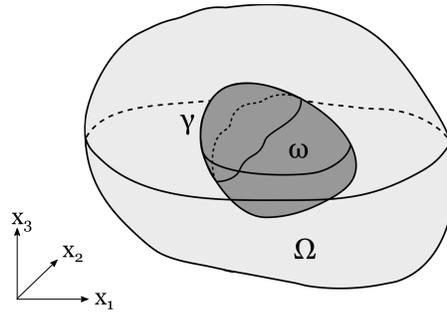


Рис. 1. Отсчетная конфигурация.

которые характеризуют новые положения точек включения и окружающей его среды. Включение в рамках рассматриваемой модели является жестким, поэтому полагаем, что вектор-функция  $\rho = \rho(x) : \bar{\omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  новых положений включения имеет заданный вид:

$$\rho(x) = Qx + d \text{ при } x \in \bar{\omega}, \text{ где } Q \in SO(3), d \in \mathbb{R}^3,$$

то есть новые положения включения получаются в результате комбинации поворота и переноса. В то же время будем считать, что новые положения окружающей гиперупругой среды описываются вектор-функцией

$$\varphi = \varphi(x), \quad \varphi : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3.$$

Таким образом, конфигурация тела в целом определяется как функцией  $\rho$ , так и функцией  $\varphi$ , обе из которых в формулируемой задаче неизвестны и подлежат отысканию.

При постановке задачи необходимо задавать кинематические ограничения на положения материальных точек. К числу таких ограничений мы отнесем краевые условия на внешней границе  $\partial\Omega$ , а также краевые условия на  $\partial\omega$ , описывающие взаимодействие жесткого включения и окружающей среды. Будем считать, что на внешней границе  $\partial\Omega$  тело перемещается заранее предписанным образом, то есть вектор-функция  $\varphi$  равна известной вектор-функции  $\varphi_0$  на  $\partial\Omega$ . На границе  $\partial\omega$  между включением и окружающей средой будем задавать два вида условий: одни задаются на части границы  $\gamma \subset \partial\omega$  и связаны с наличием трещины, а другие задаются на оставшейся части границы  $\partial\omega \setminus \gamma$  и описывают склейку соответствующих краев включения и среды (см. Рис. 2). Первым делом зададим краевое условие на той части границы, где трещина отсутствует:

$$\varphi(x) = \rho(x) \text{ при } x \in \partial\omega \setminus \gamma. \quad (1)$$

Отметим, что указанное условие фактически означает, что на  $\partial\omega \setminus \gamma$  перемещения краев гиперупругой среды и включения равны. В свою очередь положим, что соответствующие множеству  $\gamma$  край среды и край включения могут перемещаться по-разному. Эти края представляют собой различные берега трещины: будем называть их гиперупругим берегом и

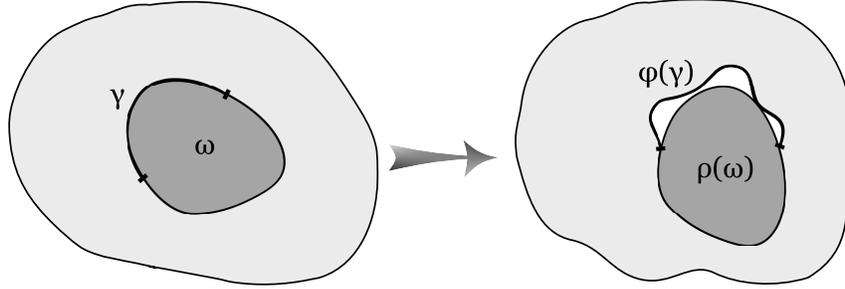


Рис. 2. В естественном состоянии (слева на рисунке) края включения и среды соприкасаются вдоль общей границы. При этом часть края включения склеена со средой, а на оставшейся части имеется трещина.

жестким берегом соответственно. Мы будем задавать следующее условие на берегах:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \notin \rho(\omega) \text{ для всех } x \in \gamma \\ (\text{другими словами, } \varphi(\gamma) \cap \rho(\omega) = \emptyset), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \rho(x), \quad x \in \omega\}, \\ \varphi(\gamma) &= \{y \in \mathbb{R}^3 : y = \varphi(x), \quad x \in \gamma\}. \end{aligned}$$

Условие (2) означает, что при деформировании гиперупругого берега трещины его точки не должны перемещаться в область, которую займет включение. Сформулированные условия (1) и (2) назовем соответственно условием склейки среды и включения и условием непроникания берегов трещины.

Следующим шагом для формулировки задачи равновесия введем функционал энергии

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} W(\nabla \varphi(x)) \, dx - L(\varphi). \quad (3)$$

В приведенном выражении функция  $L$  считается заданным линейным непрерывным функционалом в пространстве Соболева  $W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})^3$ , который описывает энергию действующих на тело внешних сил. В свою очередь первое слагаемое в (3) характеризует внутреннюю энергию гиперупругой среды. Здесь  $\nabla \varphi$  – это определяемый в отсчетной конфигурации тензор градиента деформации, компоненты которого в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  выражаются формулой  $(\nabla \varphi)_{ij} = \partial \varphi_i / \partial x_j$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . В свою очередь подынтегральная функция  $W(\cdot) : M_+ \mapsto \mathbb{R}$ , где  $M_+ = \{F \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det F > 0\}$  – это функция запасенной энергии гиперупругой среды, в отношении которой полагаем:

- (Н1) *полноранговость*: существует функция  $W^*$  такая, что  $W(F) = W^*(F, \operatorname{cof} F, \det F)$  для всех  $F \in M_+$  и  $W^*$  выпуклая по каждому своему аргументу;
- (Н2) *коэрцитивность*: существуют такие  $\alpha > 0, \beta, p, q, r$ , что

$$p \geq 2, \quad q \geq p/(p-1), \quad r > 1 \text{ и для всех } F \in M_+ :$$

$$W(F) \geq \alpha(\|F\|^p + \|\operatorname{cof} F\|^q + (\det F)^r) + \beta;$$

- (Н3) *поведение при*  $\det F \rightarrow 0+$ :

$$\lim_{\det F \rightarrow 0+} W(F) = +\infty.$$

Здесь и далее  $\operatorname{cof} F = (\det F)F^{-T}$ , а  $\|\cdot\|$  обозначает евклидову норму.

Отметим, что сделанные предположения (Н1), (Н2) и (Н3) в дальнейшем понадобятся нам для доказательства теоремы существования решений формулируемой задачи. Указанные предположения о функции запасенной энергии нельзя считать исключительно умозрительными, поскольку на практике широко применяются модели материалов, удовлетворяющие данным предположениям. В качестве примера можно привести материалы Муни–Ривлина, запасенная энергия которых имеет вид

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \mathcal{A}(\operatorname{tr} C) + \mathcal{B}(\operatorname{tr} \operatorname{cof} C) + g(\sqrt{\det C}) = \\ &= \mathcal{A}((\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2) + \mathcal{B}((\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2) + g(\lambda_1\lambda_2\lambda_3); \end{aligned}$$

а также материалы Огдена с запасенной энергией вида

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \sum_{i=1}^M \mathcal{A}_i(\operatorname{tr} C)^{\delta_i/2} + \sum_{j=1}^N \mathcal{B}_j(\operatorname{tr} \operatorname{cof} C)^{\kappa_j/2} + g(\sqrt{\det C}) = \\ &= \sum_{i=1}^M \mathcal{A}_i((\lambda_1)^{\delta_i} + (\lambda_2)^{\delta_i} + (\lambda_3)^{\delta_i}) + \sum_{j=1}^N \mathcal{B}_j((\lambda_1\lambda_2)^{\kappa_j} + (\lambda_2\lambda_3)^{\kappa_j} + (\lambda_3\lambda_1)^{\kappa_j}) + \\ &\quad + g(\lambda_1\lambda_2\lambda_3); \quad \delta_i \geq 1, \quad i = 1, \dots, M, \quad \kappa_i \geq 1, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j$  – положительные материальные константы, а функция  $g : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$  характеризует сжимаемость материала. Через  $C = (\nabla\varphi)^T \nabla\varphi$  обозначен правый тензор деформаций Коши–Грина, а через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – главные деформации. Материалы с приведенными функциями запасенной энергии при должном выборе функции  $g$  удовлетворяют свойствам (Н1)–(Н3), детальное обсуждение этого вопроса читатель может найти в книге [2], гл. 4, п. 4.9. В нашей статье мы не ограничиваемся рассмотрением только материалов Муни–Ривлина или Огдена, но стремимся получить результаты для любых материалов, которые удовлетворяют (Н1)–(Н3).

Далее введем множество

$$\mathcal{R} = \{\rho : \bar{\omega} \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \rho(x) = Qx + d, \quad x \in \bar{\omega}; \quad Q \in SO(3), \quad d \in \mathbb{R}^3\},$$

задающее положения жесткого включения, и определим множество допустимых конфигураций гиперупругой среды следующим образом:

$$\mathcal{A} = \left\{ \varphi \in V(\Omega \setminus \bar{\omega}) \mid \varphi = \varphi_0 \text{ на } \partial\Omega; \text{ существует } \rho \in \mathcal{R} \text{ такое,} \right. \\ \left. \text{что } \varphi(x) \notin \rho(\omega) \text{ при } x \in \gamma \text{ и } \varphi(x) = \rho(x) \text{ при } x \in \partial\omega \setminus \gamma \right\}, \quad (4)$$

где вектор-функция граничных значений  $\varphi_0 \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)^3$  известна, а множество

$$V(\Omega) = \left\{ \psi \in W_p^1(\Omega)^3 \mid \text{cof } \nabla\psi \in L^q(\Omega)^{3 \times 3}, \det \nabla\psi \in L^r(\Omega), \det \nabla\psi > 0 \text{ в } \Omega \right\}$$

введено в соответствии с условиями (Н2) и стандартным требованием сохранения ориентации при деформировании.

Наконец, мы в состоянии сформулировать задачу равновесия в виде следующей задачи минимизации.

*Задача минимизации энергии*

$$\text{Найти } \varphi \in \mathcal{A}, \text{ такой что } \mathcal{E}(\varphi) = \min_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi). \quad (5)$$

Отметим, что искомая здесь вектор-функция  $\varphi$  сама по себе определяет лишь положение окружающей включение гиперупругой среды, однако согласно определению множества  $\mathcal{A}$  граничные значения подлежащей отысканию в (5) функции  $\varphi$  однозначно задают элемент  $\rho \in \mathcal{R}$ , поэтому решение (5) также позволяет найти положение жесткого включения.

## 2 Существование вариационного решения

Данный параграф посвящен доказательству существования решения сформулированной выше задачи минимизации. Это доказательство придерживается стандартных методов вариационного исчисления, однако опирается на неэлементарные результаты Дж. Болла (см. [3]) и требует дополнительной аргументации, что вызвано наличием в задаче условий непроникания и склейки гиперупругой среды с включением.

**Утверждение 1.** *Пусть существует элемент  $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}$  такой, что  $\mathcal{E}(\tilde{\psi}) < +\infty$ . Тогда задача минимизации энергии (5) имеет решение.*

*Доказательство.* Из предположения (Н1) следует, что функция запасенной энергии  $W(F)$  непрерывна при  $F \in M_+$  (так как является выпуклой вещественнозначной функцией на открытом подмножестве конечномерного пространства), поэтому подынтегральное выражение в первом слагаемом (3) измеримо, как только функция  $\varphi$  измерима. Отсюда первое слагаемое функционала энергии (3), а значит и сам функционал, определены корректно при  $\varphi \in V(\Omega \setminus \bar{\omega})$  как функции, принимающие, быть может, бесконечные значения. При этом, поскольку согласно (Н2) функция  $W$  ограничена снизу, то значения функционала энергии  $\mathcal{E}$  тоже ограничены снизу.

Из предположения о конечности энергии для некоторого  $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}$  следует, что существует минимизирующая последовательность, такая что

$$\varphi_k \in \mathcal{A}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(\varphi_k) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi) < +\infty.$$

Благодаря гипотезе коэрцитивности (H2), обобщенному неравенству Пуанкаре, а также свойствам функционала  $L$ , несложно подобрать такие константы  $c > 0$  и  $d$ , что

$$\mathcal{E}(\varphi_k) \geq c(\|\varphi_k\|_{W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})}^p + \|\operatorname{cof} \nabla \varphi_k\|_{L^q(\Omega \setminus \bar{\omega})}^q + \|\det \nabla \varphi_k\|_{L^r(\Omega \setminus \bar{\omega})}^r) + d.$$

Отсюда следует ограниченность последовательностей

$$\varphi_k, \quad \operatorname{cof} \nabla \varphi_k, \quad \det \nabla \varphi_k$$

в пространствах  $W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})^3$ ,  $L^q(\Omega \setminus \bar{\omega})^{3 \times 3}$ ,  $L^r(\Omega \setminus \bar{\omega})$  соответственно. Следовательно, с точностью до подпоследовательности,

$$\begin{aligned} \varphi_k &\rightarrow \varphi \text{ слабо в } W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})^3, \\ \operatorname{cof} \nabla \varphi_k &\rightarrow H \text{ слабо в } L^q(\Omega \setminus \bar{\omega})^{3 \times 3}, \\ \det \nabla \varphi_k &\rightarrow \delta \text{ слабо в } L^r(\Omega \setminus \bar{\omega}) \end{aligned} \quad (6)$$

при  $k \rightarrow +\infty$ . Принимая во внимание гипотезу (H1), для всех  $(\varphi, H, \delta) \in W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})^3 \times L^q(\Omega \setminus \bar{\omega})^{3 \times 3} \times L^r(\Omega \setminus \bar{\omega})$  определим функционал

$$\mathcal{J}(\varphi, H, \delta) = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} W^*(\nabla \varphi, H, \delta) dx - \langle L, \varphi \rangle.$$

Отметим, что функционал  $\mathcal{J}$  является выпуклым по каждому аргументу, а также что  $\mathcal{E}(\varphi_k) = \mathcal{J}(\varphi_k, \operatorname{cof} \nabla \varphi_k, \det \nabla \varphi_k)$ . Пользуясь поливыпуклостью запасенной энергии и сходимостями (6), мы можем в первом слагаемом выражения  $\mathcal{J}(\varphi_k, \operatorname{cof} \nabla \varphi_k, \det \nabla \varphi_k)$  перейти к нижнему пределу (см. [7], р. 709). Тогда получаем

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(\varphi_k) \geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(\varphi_k, \operatorname{cof} \nabla \varphi_k, \det \nabla \varphi_k) \geq \mathcal{J}(\varphi, H, \delta).$$

Так как последовательность  $\varphi_k$  минимизирующая, то мы на самом деле получили

$$\inf_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi) \geq \mathcal{J}(\varphi, H, \delta).$$

В то же время для предельных в (6) функций справедливы равенства  $H = \operatorname{cof} \nabla \varphi$  и  $\delta = \det \nabla \varphi$  (см. [5], th. 6.2 или [8], р. 140, lem 6.6). Поэтому имеем  $\mathcal{J}(\varphi, H, \delta) = \mathcal{E}(\varphi)$  и из полученного выше неравенства находим, что  $\mathcal{E}(\varphi) \leq \mathcal{E}(\psi)$  для всех  $\psi \in \mathcal{A}$ .

Докажем теперь, что  $\varphi \in \mathcal{A}$ . Принадлежность  $\varphi \in V(\Omega \setminus \bar{\omega})$  и, в частности, справедливость условия сохранения ориентации  $\det \nabla \varphi > 0$  в  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ , устанавливается стандартными методами, см. [6], th. 6.2. В свою очередь краевое условие  $\varphi = \varphi_0$  на  $\partial\Omega$  выполняется благодаря первой сходимости (6) и компактности оператора следа. Остается доказать, что предельный

элемент удовлетворяет условиям склейки и непроникания на  $\partial\omega$ , то есть что существует элемент  $\rho$ , для которого верны соотношения

$$\varphi(x) \in \mathbb{R}^3 \setminus \rho(\omega) \text{ при } x \in \gamma, \quad \varphi(x) = \rho(x) \text{ при } x \in \partial\omega \setminus \gamma, \quad \rho \in \mathcal{R}. \quad (7)$$

С этой целью заметим, что для каждого элемента минимизирующей последовательности в силу принадлежности  $\varphi_k \in \mathcal{A}$  существуют  $Q_k \in SO(3)$  и  $d_k \in \mathbb{R}^3$ , для которых имеем

$$Q_k^T(\varphi_k(x) - d_k) \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega \text{ при } x \in \gamma, \quad \varphi_k(x) = Q_k x + d_k \text{ при } x \in \partial\omega \setminus \gamma. \quad (8)$$

Теоремы о следе и теоремы вложения позволяют выделить такую подпоследовательность (сохраним прежнее обозначение), что

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ п.в. на } \partial\omega$$

при  $k \rightarrow +\infty$ . Без ограничения общности также можно считать, что  $Q_k \rightarrow \tilde{Q}$  и  $d_k \rightarrow \tilde{d}$  п.в. на  $\partial\omega$  при  $k \rightarrow +\infty$ , где  $\tilde{Q} \in SO(3)$  и  $\tilde{d} \in \mathbb{R}^3$ . Тогда, переходя к пределу в соотношениях (8), получаем

$$\tilde{Q}^T(\varphi(x) - \tilde{d}) \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega \text{ при } x \in \gamma, \quad \varphi(x) = \tilde{Q}x + \tilde{d} \text{ при } x \in \partial\omega \setminus \gamma.$$

Если обозначить  $\rho(x) = \tilde{Q}x + \tilde{d}$ , то полученные в результате предельного перехода соотношения и есть необходимые нам (7). Таким образом, мы доказали, что элемент  $\varphi$  не только доставляет минимум функционалу энергии на множестве  $\mathcal{A}$ , но и сам принадлежит этому множеству.  $\square$

### 3 Краевая задача

Перейдем теперь к изучению краевой задачи, которую наряду с задачей минимизации (5) можно рассматривать в качестве постановки задачи равновесия гиперупругого тела с жестким включением и трещиной. Целью данного параграфа является получить краевую задачу как набор соотношений, которые следуют из задачи минимизации (5) и затем дать комментарии к механическому смыслу указанных соотношений.

Сделаем предварительное предположение о том, что внешняя сила, действующая на тело, имеет вид «замороженной нагрузки»: распределение этой силы задается в отсчетной конфигурации отображением  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  и фигурирующая в определении функционала энергии (3) функция  $L$  определяется по правилу

$$L : \varphi \in \mathcal{A} \mapsto \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f \cdot \varphi \, dx + \int_{\omega} f \cdot \rho \, dx; \quad f \in L^s(\Omega)^3.$$

Здесь элемент  $\rho \in \mathcal{R}$  считаем таким, что  $\varphi = \rho$  на  $\partial\omega \setminus \gamma$ , а показатель  $s \geq 1$  будем считать выбранным так, что функционал  $L$  непрерывен. Сделанное предположение о характере внешней силы обусловлено стремлением к простоте и наглядности дальнейших выкладок.

Фиксируем вектор-функцию  $\varphi$ , являющуюся решением задачи минимизации (5) и задающую равновесную конфигурацию тела. Всюду далее

будем считать, что эта функция является достаточно гладкой. Будем отталкиваться от неравенства:

$$\varphi \in \mathcal{A}, \quad \mathcal{E}(\psi) - \mathcal{E}(\varphi) \geq 0 \quad \text{для всех } \psi \in \mathcal{A}. \quad (9)$$

Все дифференциальные уравнения и краевые условия, которые мы стремимся получить, естественно следуют из (9), если выбрать тестовые элементы  $\psi$  специальными. Какие именно тестовые элементы следует выбрать зависит от того, какие именно соотношения краевой задачи мы стремимся получить. Тем не менее, процедура выбора тестовых элементов подчиняется общей схеме.

Общая схема рассуждений следующая. Заметим, что в качестве тестовых элементов в (9) можно выбрать элементы однопараметрического семейства достаточно гладких вектор-функций  $\psi^\varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , такого что:

- (a1)  $\psi^\varepsilon \in \mathcal{A}$  при каждом  $\varepsilon$ ;
- (a2)  $\psi^0 = \varphi$ , где  $\varphi$  – решение задачи минимизации, фиксированное выше;
- (a3) существует достаточно регулярная функция  $\psi' : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  такая, что

$$\psi' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} (\psi^\varepsilon - \psi^0) \quad \text{в } \bar{\Omega} \setminus \omega.$$

Тогда из (9) при  $\varepsilon > 0$  следует:

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \frac{1}{\varepsilon} (W(\nabla \psi^\varepsilon) - W(\nabla \psi^0)) dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \frac{1}{\varepsilon} (\psi^\varepsilon - \psi^0) \cdot f dx - \int_{\omega} \frac{1}{\varepsilon} (\rho^\varepsilon - \rho^0) \cdot f dx \geq 0,$$

где  $\rho^0 := \rho$  – равновесная конфигурация включения. Из этого неравенства, перейдя формально к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ , будем иметь

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} P(\nabla \varphi) : \nabla \psi' dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f \cdot \psi' dx - \int_{\omega} f \cdot \rho' dx \geq 0, \quad (10)$$

где

$$\rho' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon} (\rho^\varepsilon - \rho^0) \quad \text{в } \omega,$$

$$P(\nabla \varphi) = \frac{\partial W}{\partial F}(\nabla \varphi) \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}. \quad (11)$$

Соотношение (10) является аналогом хорошо известного в вариационном исчислении уравнения Эйлера – Лагранжа, записанного в слабой форме. Механический смысл функций  $\psi'$  и  $\rho'$  состоит в том, что они задают виртуальные конфигурации тела вблизи равновесной, отвечающей значению  $\varepsilon = 0$  конфигурации (см. Рис. 3). Подчеркнем, что в неравенстве (10) функции  $\psi'$  и  $\rho'$  могут быть произвольными – их произвольность обеспечивается произвольностью выбора однопараметрического семейства  $\psi^\varepsilon$ . Поэтому далее, поочередно выбирая тестовые семейства функций  $\psi^\varepsilon$  специальными, мы сможем получить функции  $\psi'$  и  $\rho'$

желаемого вида и как следствие отыскать из (10) дифференциальные уравнения и естественные краевые условия.

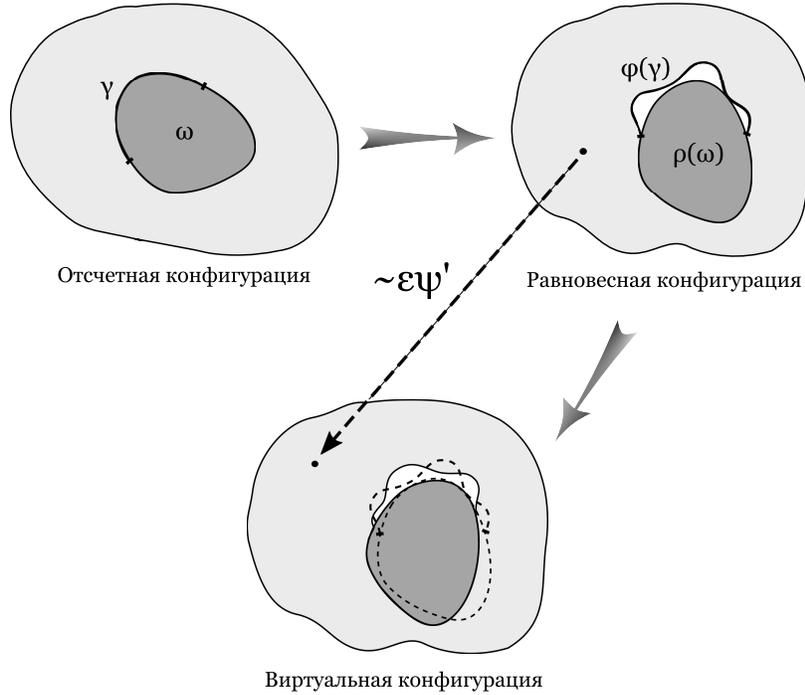


Рис. 3. Виртуальная конфигурация строится таким образом, чтобы виртуальные перемещения имели желаемый вид.

Первым делом рассмотрим тестовое семейство

$$\psi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\eta,$$

где  $\eta : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  – это такая гладкая финитная вектор-функция, что  $\text{supp } \eta \subset \Omega \setminus \bar{\omega}$ . Построенное указанным образом семейство  $\psi^\varepsilon$  нам подходит, поскольку, во-первых, при фиксированных  $\varepsilon$  выполняется принадлежность  $\psi^\varepsilon \in \mathcal{A}$  (необходимые граничные условия следуют из финитности функции  $\eta$ , условие сохранения ориентации обеспечивается при малых  $\varepsilon$  непрерывностью отображения  $\varepsilon \mapsto \det \nabla \psi^\varepsilon$ ), а во-вторых, очевидно выполняются свойства (a2), (a3). При этом по построению:

$$\psi' = \eta \text{ в } \bar{\Omega} \setminus \omega,$$

благодаря чему неравенство (10) принимает следующий вид

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} P(\nabla \varphi) : \nabla \eta \, dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f \cdot \eta \, dx \geq 0.$$

В силу произвольности значений функции  $\eta$  в области  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  получаем, что в смысле распределений выполняется дифференциальное уравнение

$$-\operatorname{div} P(\nabla\varphi) = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}. \quad (12)$$

Найденное уравнение служит уравнением равновесия гиперупругой среды, окружающей жесткое включение.

Теперь приступим к отысканию краевых условий, выполняющихся на границе включения. Воспользуемся формулой Грина

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} P : \nabla \xi \, dx = - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \operatorname{div} P \cdot \xi \, dx + \int_{\partial\omega} P\nu \cdot \xi \, d\Sigma, \quad (13)$$

справедливой для достаточно гладких тензорных полей  $P : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^{3 \times 3}$  и векторных полей  $\xi : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3$ ,  $\xi = 0$  на  $\partial\Omega$ . Здесь и далее  $d\Sigma$  — это элемент площади поверхности  $\partial\omega$ . С учетом формулы Грина (13) и доказанного уравнения равновесия (12) неравенство (10) преобразуется к виду

$$\int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \cdot \psi' \, d\Sigma - \int_{\omega} f \cdot \rho' \, dx \geq 0. \quad (14)$$

С этого момента, при отыскании всех естественных краевых условий будем опираться на неравенство (14) вместо (10).

Найдем краевые условия контакта. Так же как и ранее, рассмотрим тестовое семейство вида

$$\psi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\xi, \quad (15)$$

однако теперь будем считать, что гладкое векторное поле  $\xi$  может быть отлично от нуля на  $\gamma$ . Без труда можно проверить, что при подобном построении тестовое семейство (15) по-прежнему удовлетворяет свойствам (a2), (a3). Чтобы в дополнение к этому гарантировать (a1), необходимо наложить ограничения на значения  $\xi$  на  $\partial\omega$ . С этой целью введем множества

$$Abs = \{x \in \bar{\Omega} \setminus \omega : \varphi(x) \notin \partial\rho(\omega)\}, \quad Cont = \{x \in \bar{\Omega} \setminus \omega : \varphi(x) \in \partial\rho(\omega)\}.$$

Первое из указанных множеств состоит из точек отсчетной конфигурации, в которых контакт после деформирования отсутствует, а второе — из тех точек, в которых контакт реализуется. Так как благодаря условию непроникания и предположению достаточной гладкости  $\varphi$  выполняется соотношение  $\varphi(x) \notin \rho(\omega)$ ,  $x \in \Omega \setminus \omega$ , то введенные выше множества в совокупности образуют разбиение области определения функции  $\varphi$ . Обратим внимание на следующие факты.

- I. Множество  $Abs$  является открытым, следовательно для любой точки  $x \in Abs$  существует шар  $B_{\delta(x)}$  с центром  $\varphi(x)$  и радиусом  $\delta(x) > 0$ , который не пересекается с  $\bar{\rho(\omega)}$ .
- II. Так как поверхность  $\partial\rho(\omega)$  гладкая, то для любого  $x \in Cont$  существует прямой конус  $K_{h(x)}$  с вершиной  $\varphi(x)$ , радиусом  $h(x) > 0$

и осью, задаваемой нормалью  $\rho(\nu)$ , который удовлетворяет  $K_{h(x)} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \rho(\omega)$ .

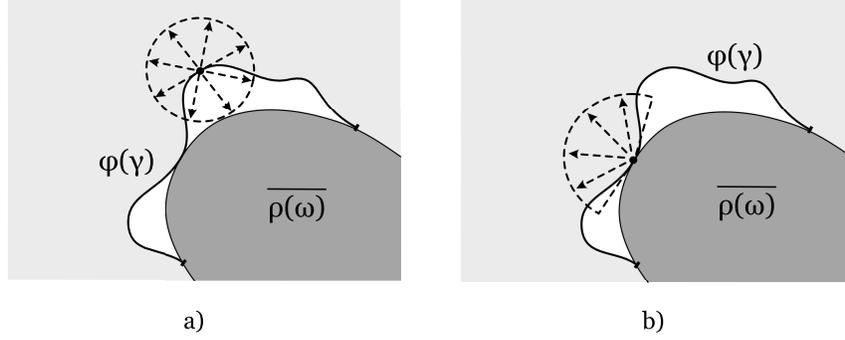


Рис. 4. Построение виртуальных перемещений: а) в точках отсутствия контакта, б) в контактных точках.

Опираясь на перечисленные факты, построим гладкую вектор-функцию  $\xi : \overline{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  так, что

- (i)  $\xi = 0$  на множествах  $\partial\Omega$  и  $\partial\omega \setminus \gamma$ ,
- (ii)  $\xi(x) \in B_{\delta(x)} - \varphi(x)$  в точках  $x \in \gamma \cap Abs$ ,
- (iii)  $\xi(x) \in K_{h(x)} - \varphi(x)$  в точках  $x \in \gamma \cap Cont$ .

Тогда тестовое семейство, определенное формулой (15), при  $0 < \varepsilon \leq 1$  является допустимым (для иллюстрации см. Рис. 3), а значит мы можем оперировать неравенством (14). Более того, с учетом свойства (i) вектор-функции  $\xi$  неравенство (14) принимает вид

$$\int_{\gamma} P(\nabla\varphi)\nu \cdot \xi \, d\Sigma \geq 0. \quad (16)$$

Так как в силу свойства (ii) вектор  $\xi$  может иметь противоположные направления на  $\gamma \cap Abs$ , то из (16) вытекает

$$P(\nabla\varphi)\nu = 0 \text{ на } \gamma \cap Abs. \quad (17)$$

На множестве  $\gamma \cap Cont$  согласно свойству (iii) ситуация другая: направление вектора  $\xi$  не является произвольным. В связи с этим разложим вектор  $\xi$  на нормальную и касательные составляющие:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_\nu \nu_\rho + \xi_\tau^1 \tau_\rho^1 + \xi_\tau^2 \tau_\rho^2, \\ \xi_\nu &= \xi \cdot \nu_\rho, \quad \xi_\tau^1 = \xi \cdot \tau_\rho^1, \quad \xi_\tau^2 = \xi \cdot \tau_\rho^2, \end{aligned}$$

где  $\nu_\rho, \tau_\rho^1, \tau_\rho^2$  – поле векторов, задающее ортонормированный базис на поверхности  $\rho(\partial\omega)$  с вектором нормали  $\nu_\rho = \rho(\nu)$ . С учетом описанного разложения неравенство (16) представляется в виде

$$\int_{\gamma} (P(\nabla\varphi)\nu \cdot \nu_\rho) \xi_\nu \, d\Sigma + \int_{\gamma} (P(\nabla\varphi)\nu \cdot \tau_\rho^1) \xi_\tau^1 \, d\Sigma + \int_{\gamma} (P(\nabla\varphi)\nu \cdot \tau_\rho^2) \xi_\tau^2 \, d\Sigma \geq 0.$$

Заметим, что в силу свойства (iii) выполняется  $\xi_\nu \leq 0$ , а знак  $\xi_\tau^1$  и  $\xi_\tau^2$  может быть любым, поэтому получаем

$$P(\nabla\varphi)\nu \cdot \nu_\rho \leq 0, \quad P(\nabla\varphi)\nu \cdot \tau_\rho^1 = 0, \quad P(\nabla\varphi)\nu \cdot \tau_\rho^2 = 0 \quad \text{на } \gamma \cap Cont. \quad (18)$$

Комбинируя (17) и (18), заключаем, что

$$P(\nabla\varphi)\nu = \tilde{\mathbf{I}}_{\partial\rho(\omega)} P_\nu(\nabla\varphi)\nu_\rho, \quad P_\nu(\nabla\varphi) \leq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (19)$$

где

$$P_\nu(\nabla\varphi) = P(\nabla\varphi)\nu \cdot \nu_\rho, \quad \tilde{\mathbf{I}}_{\partial\rho(\omega)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) \in \partial\rho(\omega), \\ 0, & \text{если } \varphi(x) \notin \partial\rho(\omega). \end{cases}$$

Найденное краевое условие (19) является естественным условием контакта гиперупругой среды и жесткого включения.

Теперь приступим к отысканию условий равновесия включения. Напомним, что согласно заданной структуре наше включение представляет собой абсолютно твердое тело. Хорошо известно, что виртуальные положения такого тела получаются в результате инфинитезимальных поворотов и переносов. Рассмотрим сначала переносы, а затем повороты. Первым делом выберем гладкую вектор-функцию  $\tilde{b} : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3$  так, что

- 1)  $\tilde{b} = b$  на  $\partial\omega$ , где вектор  $b \in \mathbb{R}^3$  произвольный постоянный;
- 2)  $\tilde{b} = 0$  на  $\partial\Omega$ ;

и положим

$$\psi^\varepsilon = \varphi + \varepsilon\tilde{b}.$$

Отметим, что  $\tilde{b}$  характеризует перенос точек равновесной конфигурации в виртуальную, при котором берега трещины и включения переносятся равномерно. При таком выборе

$$\psi' = b \quad \text{на } \partial\omega, \quad \rho' = b \quad \text{в } \omega,$$

поэтому неравенство (14) дает

$$\left( \int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} f \, dx \right) \cdot b \geq 0.$$

Следовательно, в силу произвольности вектора  $b$ , имеем

$$\int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} f \, dx = 0. \quad (20)$$

Теперь рассмотрим случай инфинитезимального поворота. Выберем гладкое поле матриц  $\tilde{K} : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , удовлетворяющее свойствам

- 1)  $\tilde{K}^T = -\tilde{K}$  в  $\bar{\Omega} \setminus \omega$ ;
- 2)  $\tilde{K} = K$  на  $\partial\omega$ , где постоянная матрица  $K \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  кососимметрична;
- 3)  $\tilde{K} = 0$  на  $\partial\Omega$ .

Ассоциируем с указанным полем по формуле Родрига семейство матриц

$$\tilde{Q}(\varepsilon) := I + (\sin \varepsilon)\tilde{K} + (1 - \cos \varepsilon)\tilde{K}^2 \text{ в } \bar{\Omega} \setminus \omega$$

и положим

$$\psi^\varepsilon = \tilde{Q}(\varepsilon)\varphi.$$

В каждой точке множества  $\bar{\Omega} \setminus \omega$  матрица  $\tilde{Q}(\varepsilon)$  является матрицей вращения. При этом, согласно определению  $\tilde{K}$ , компоненты матрицы  $\tilde{Q}(\varepsilon)$  постоянны на  $\partial\omega$ . Сказанное означает, что в виртуальной конфигурации, определяемой полем  $\psi^\varepsilon$ , положения берегов трещины и включения соответствуют равномерному повороту. В дополнение к этому несложно видеть, что

$$\psi' = \tilde{K}\varphi \text{ в } \bar{\Omega} \setminus \omega,$$

и, в частности,

$$\psi' = K\varphi = k \times \varphi \text{ на } \partial\omega, \quad \rho' = K\rho = k \times \rho \text{ в } \omega,$$

где вектор  $k = (k_x, k_y, k_z)^T$  таков, что

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно неравенство (14) влечет

$$\int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \cdot K\varphi \, d\Sigma - \int_{\omega} f \cdot K\rho \, dx \geq 0,$$

что эквивалентно

$$\int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \cdot (k \times \varphi) \, d\Sigma - \int_{\omega} f \cdot (k \times \rho) \, dx \geq 0.$$

Отсюда, пользуясь правилами вычисления смешанного произведения, получаем

$$\left( \int_{\partial\omega} \varphi \times P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} \rho \times f \, dx \right) \cdot k \geq 0.$$

Вектор  $k$  произволен в силу произвольности матрицы  $K$ , поэтому имеем

$$\int_{\partial\omega} \varphi \times P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} \rho \times f \, dx = 0. \quad (21)$$

Полученное соотношение, вместе с найденным ранее (20), относится к условиям равновесия жесткого включения.

Наконец, теперь мы в состоянии привести краевую задачу, которая формально следует из задачи (5). Собирая вместе полученные выше соотношения (12), (19), (20) и (21), а также пользуясь тем, что решение задачи минимизации (5) принадлежит множеству допустимых конфигураций  $\mathcal{A}$ , приходим к следующей формулировке краевой задачи.

Краевая задача

Найти функцию  $\varphi : \bar{\Omega} \setminus \omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , описывающую конфигурацию гиперупругой среды, а также матрицу  $Q \in SO(3)$  и вектор  $d \in \mathbb{R}^3$ , задающие положение жесткого включения, такие что:

$$-\operatorname{div} P(\nabla\varphi) = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (22)$$

$$P(\nabla\varphi) = \frac{\partial W}{\partial F}(\nabla\varphi) \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (23)$$

$$\det \nabla\varphi > 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (24)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (25)$$

$$\varphi = \rho(x) := Qx + d \quad \text{на } \partial\omega \setminus \gamma, \quad (26)$$

$$\varphi(\gamma) \cap \rho(\omega) = \emptyset, \quad (27)$$

$$P(\nabla\varphi)\nu = \tilde{\mathbf{1}}_{\partial\rho(\omega)} P_\nu(\nabla\varphi)\rho(\nu), \quad P_\nu(\nabla\varphi) \leq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (28)$$

$$\int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} f \, dx = 0, \quad (29)$$

$$\int_{\partial\omega} \varphi \times P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} \rho \times f \, dx = 0. \quad (30)$$

Здесь

$$P_\nu(\nabla\varphi) = P(\nabla\varphi)\nu \cdot \rho(\nu), \quad \tilde{\mathbf{1}}_{\partial\rho(\omega)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) \in \partial\rho(\omega), \\ 0, & \text{если } \varphi(x) \notin \partial\rho(\omega). \end{cases}$$

Рассуждениями выше фактически установлено следующее утверждение.

**Утверждение 2.** При условии достаточной гладкости функции запасенной энергии  $W$  любое достаточно гладкое решение задачи минимизации (5) удовлетворяет краевой задаче (22)–(30).

Поясним механический смысл соотношений полученной нами краевой задачи.

Уравнение (22) является уравнением равновесия гиперупругой среды, окружающей жесткое включение. В свою очередь уравнение (23) представляет собой уравнение состояния: оно связывает первый тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа  $P$  с производной  $\frac{\partial W}{\partial F}$  функции запасенной энергии  $W$ . Условие (24) есть условие сохранения ориентации. Условие (25) означает, что внешний край среды перемещается предписанным заранее образом. Подчеркнем, что соотношения (22)–(25) задаются в отсчетной конфигурации. Все они хорошо известны из классической теории нелинейной упругости.

Особенностью нашей задачи является то, что в гиперупругую среду инкорпорировано жесткое включение и на части границы с включением имеется трещина отслоения. Наличие включения и трещины передается, в частности, условиями (26), (27). Первое из этих условий означает, что на части границы  $\partial\omega \setminus \gamma$  край гиперупругой среды склеен с включением, то есть перемещения края среды и включения равны. В свою очередь на оставшейся части  $\gamma$  перемещения края гиперупругой среды и включения могут быть не равны, что и означает наличие трещины. Вместе с тем, благодаря условию (27) гиперупругий берег трещины после деформирования не может проникнуть внутрь области, которую займет включение. Отметим однако, что (27) не запрещает, чтобы для некоторой точки  $\tilde{x} \in \gamma$  реализовалось соотношение  $\varphi(\tilde{x}) \in \partial\rho(\omega)$ . Такая материальная точка является контактной: после деформирования эта точка гиперупругого берега трещины соприкасается с жестким берегом, представляющим часть края включения. Множество контактных точек в задаче (22)–(30) заранее не задается и фактически может быть определено только для известного решения.

Механический смысл оставшихся условий (28)–(30) становится более ясным, если их переформулировать, записав в деформированной конфигурации. Так, осуществляя в них замену переменных  $x^\varphi = \varphi(x)$ ,  $x \in \Omega \setminus \omega$ , и  $x^\rho = \rho(x)$ ,  $x \in \omega$ , с учетом свойств преобразования Пиолы (см. [2], пп. 1.5, 1.7, 2.5) приходим к уравнениям

$$t^\varphi(\nu_\varphi) = (\mathbf{1}_{\partial\rho(\omega)} N^\varphi) \rho(\nu), \quad N^\varphi \leq 0 \text{ на } \varphi(\gamma), \quad (31)$$

$$\int_{\varphi(\partial\omega)} t^\varphi(\nu_\varphi) d\Sigma^\varphi - \int_{\rho(\omega)} f^\rho dx^\rho = 0, \quad (32)$$

$$\int_{\varphi(\partial\omega)} x^\varphi \times t^\varphi(\nu_\varphi) d\Sigma^\varphi - \int_{\rho(\omega)} x^\rho \times f^\rho dx^\rho = 0, \quad (33)$$

в которых

$$N^\varphi = t^\varphi(\nu_\varphi) \cdot \rho(\nu), \quad \mathbf{1}_{\partial\rho(\omega)}(x^\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^\varphi \in \partial\rho(\omega), \\ 0, & \text{если } x^\varphi \notin \partial\rho(\omega), \end{cases} \quad f^\rho = f \circ \rho^{-1}.$$

При переходе от (28)–(30) к эквивалентным соотношениям (31)–(33) мы воспользовались формулой

$$P(\nabla\varphi)\nu = \|(\text{cof } \nabla\varphi)\nu\| t^\varphi(\nu_\varphi), \quad \nu_\varphi = \varphi(\nu),$$

связывающей первый вектор напряжений Пиолы – Кирхгофа  $P(\nabla\varphi)\nu$  с вектором напряжений Коши  $t^\varphi(\nu_\varphi)$ , а также формулами

$$d\Sigma = \frac{1}{\|(\text{cof } \nabla\varphi)\nu\|} d\Sigma^\varphi, \quad dx = \frac{1}{\det \nabla\varphi} dx^\varphi, \quad dx = dx^\rho,$$

связывающими между собой элементы площадей  $d\Sigma$  и  $d\Sigma^\varphi$ , соответствующие поверхностям  $\partial\omega$  и  $\varphi(\partial\omega)$ , и элементы объемов  $dx$ ,  $dx^\varphi$ ,  $dx^\rho$  в отсчетной и деформированной конфигурациях.

Смысл условий (31) состоит в том, что вектор напряжений  $t^\varphi(\nu_\varphi)$ , определенный на деформированном берегу трещины, коллинеарен вектору нормали  $\rho(\nu)$ . При этом в точках контакта указанный вектор напряжений противоположен нормали (см. Рис. 5), а в точках отсутствия контакта равен нулевому вектору (так как функция  $\mathbf{1}_{\partial\rho(\omega)}$  из первого условия (31) служит характеристической для множества контактных точек). Таким образом, напряженное состояние гиперупругого берега трещины

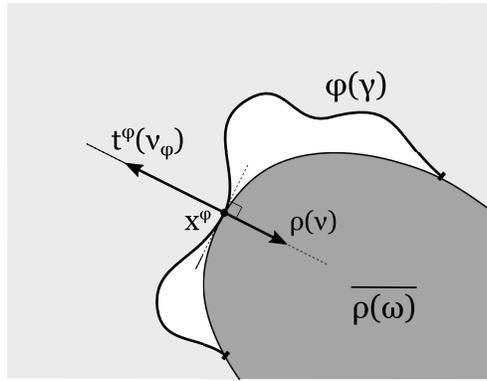


Рис. 5. В точках контакта вектор напряжений Коши равен силе реакции.

зависит от того, происходит после деформирования контакт с включением или нет. Если контакт происходит, то на указанный берег трещины воздействует сила нормальной реакции со стороны включения. Напротив, если контакт отсутствует, то берег свободен от нагрузок. Отметим еще раз, что при постановке задачи равновесия мы заранее не знаем, в каких точках после деформирования контакт произойдет, а в каких нет. Тем не менее, условия (31) допускают как одну, так и другую ситуацию.

Наконец, условия (32) и (33) означают равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на включение. Первые слагаемые в (32) и (33) учитывают взаимодействие включения и окружающей его гиперупругой среды. При этом, согласно (31), в точках отсутствия контакта воздействие не учитывается. Таким образом выражается принцип баланса сил и моментов, действующих на включение, с учетом возможного контакта берегов трещины.

Полученные условия (31)–(33) можно считать нелинейными аналогами рассмотренных ранее в статьях [9–11] инфинитезимальных условий, которые описывают равновесие жестких включений с трещинами, инкорпорированных в линейно упругое тело.

## References

- [1] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenکو, *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton, 2000.
- [2] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity: Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [3] J.M. Ball, *Some open problems in elasticity*, In: P. Newton, P. Holmes, A. Weinstein, *Geometry, Mechanics, and Dynamics*, Springer, New York, 2002.
- [4] J.M. Ball, *Progress and puzzles in nonlinear elasticity*, In: J. Schröder, P. Neff, *Poly-, Quasi- and Rank-One Convexity in Applied Mechanics*, Springer, Vienna, 2010.
- [5] J.M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **63** (1976), 337–403.
- [6] J.M. Ball, J.C. Currie, P.J. Olver, *Null Lagrangians, weak continuity, and variational problems of arbitrary order*, *Journal of Functional Analysis*, **41**:2 (1981), 135–174.
- [7] P.G. Ciarlet, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2013.
- [8] F. Rindler, *Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 2018.
- [9] A.M. Khludnev, A.A. Novotny, J. Sokolowski, A. Zochowski, *Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions*, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **57**:10 (2009), 1718–1732.
- [10] A.M. Khludnev, *Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions*, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **29**:3 (2010), 392–399.
- [11] A.M. Khludnev, M. Negri, *Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **64** (2013), 179–191.
- [12] A.M. Khludnev, *Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies*, *Archive of Applied Mechanics*, **83** (2013), 1493–1509.
- [13] V.V. Shcherbakov, *Choosing an optimal shape of thin rigid inclusions in elastic bodies*, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **56**:2 (2015), 321–329.
- [14] T. Popova, G.A. Rogerson, *On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **67** (2016), 105.
- [15] I.V. Fankina, *A contact problem for an elastic plate with a thin rigid inclusion*, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **10** (2016), 333–340.
- [16] P.I. Plotnikov, E.M. Rudoy, *Shape sensitivity analysis of energy integrals for bodies with rigid inclusions and cracks*, *Doklady Mathematics*, **84** (2011), 681–684.
- [17] E.M. Rudoy, *Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **66** (2014), 1923–1937.
- [18] E.M. Rudoy, *Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a thin delaminated rigid inclusion*, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **10** (2016), 264–276.
- [19] R.V. Namm, G.I. Tsoy, *Solution of a contact elasticity problem with a rigid inclusion*, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59** (2019), 659–666.
- [20] N.P. Lazarev, *An equilibrium problem for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion*, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **6** (2013), 53–62.
- [21] N.P. Lazarev, *Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **66** (2015), 2025–2040.
- [22] V. Shcherbakov, *Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks*, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **67**:71 (2016), 71.

- [23] E. Rudoy, V. Shcherbakov, *First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks*, Applied Mathematics & Optimization, **84** (2021), 2775–2802.
- [24] D. Knees, A. Mielke, *Energy release rate for cracks in finite-strain elasticity*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **31** (2008), 501–528.
- [25] D. Knees, C. Zanini, A. Mielke, *Crack growth in polyconvex materials*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **239**:15 (2010), 1470–1484.
- [26] D. Knees, A. Mielke, C. Zanini, *On the inviscid limit of a model for crack propagation*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **18**:9 (2008), 1529–1569.
- [27] G. Dal Maso, G. Lazzaroni, *Quasistatic crack growth in finite elasticity with non-interpenetration*, Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire, **27**:1 (2010), 257–290.
- [28] S. Almi, G. Dal Maso, R. Toader, *Quasi-static crack growth in hydraulic fracture*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **109** (2014), 301–318.
- [29] S. Almi, *Energy release rate and quasi-static evolution via vanishing viscosity in a fracture model depending on the crack opening*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, **23**:3 (2017), 791–826.
- [30] A. Giacomini, M. Ponsiglione, *Non-interpenetration of matter for SBV deformations of hyperelastic brittle materials*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, **138**:5 (2008), 1019–1041.
- [31] P. Gussmann, A. Mielke, *Linearized elasticity as Mosco limit of finite elasticity in the presence of cracks*, Advances in Calculus of Variations, **13**:1 (2020), 33–52.
- [32] M. Negri, R. Toader, *Scaling in fracture mechanics by Bazant law: From finite to linearized elasticity*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **25**:7, 1389–1420.
- [33] R. Rizzoni, S. Dumont, F. Lebon, *On Saint Venant - Kirchhoff imperfect interfaces*, International Journal of Non-Linear Mechanics, **89** (2017), 101–115.
- [34] S. Dumont, F. Lebon, M.L. Raffa, R. Rizzoni, *Towards nonlinear imperfect interface models including micro-cracks and smooth roughness*, Annals of Solid and Structural Mechanics, **9** (2017), 13–27.
- [35] M.L. Raffa, F. Lebon, R. Rizzoni, *Derivation of a model of imperfect interface with finite strains and damage by asymptotic techniques: an application to masonry structures*, Meccanica, **53** (2018), 1645–1660.
- [36] C. Licht, G. Michaille, *A modelling of elastic adhesive bonded joints*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, **7**:2 (1997), 711–740.
- [37] C. Licht, G. Michaille, S. Pagano, *A model of elastic adhesive bonded joints through oscillation-concentration measures*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **87**:4 (2007), 343–365.
- [38] A.L. Bessoud, F. Krasucki, G. Michaille, *Multi-material with strong interface: Variational modelings*, Asymptotic Analysis, **61** (2009), 1–19.
- [39] A.L. Bessoud, *Multi-materials with strong interface: Young measures formulation*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **93**:5 (2010), 518–535.

ALEXEY IGOREVICH FURTSEV  
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY  
 UL. PIROGOVA, 1,  
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS OF SB RAS  
 PR. LAVRENTYEVA, 15,  
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
 Email address: [furtsev@hydro.nsc.ru](mailto:furtsev@hydro.nsc.ru)