S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, стр. 144–144 (2022) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2022.12.xxx MSC 35B40

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ БАРОТРОПНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

А.Е. Мамонтов, Д.А. Прокудин

Abstract. The asymptotic behavior (as $t \to +\infty$) of the solution to the initial-boundary value problem is analyzed for the system of differential equations describing the barotropic dynamics of a viscous multifluid with a non-diagonal, symmetric and positive definite viscosity matrix, in the case of one spatial variable. New a priori estimates are obtained and stabilization of the solution to the initial-boundary value problem is proved.

Keywords: barotropic flow, viscous compressible multifluid, viscosity matrix, stabilization of solution.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерных уравнений динамики вязкой баротропной многокомпонентной смеси

$$(1)\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0,\ v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j,\ \alpha_j = \mathrm{const} \in (0,1),\ j = 1,\ldots,N,\ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j = 1,$$

$$(2)\qquad \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial p(\rho)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Stationary solutions of a boundary value problem for equations of barotropic flow of multicomponent media.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 075-02-2023-1799.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \tag{3}$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Здесь $\rho > 0$ — плотность смеси и u_i, $i = 1, \dots, N$ — скорости компонент (составляющих) смеси, являются искомыми функциями времени $t \in [0, T]$, где $0 < T < +\infty$, и точки x области течения $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$; v — средневзвешанная (барицентрическая) скорость; $N \geqslant 2$ — число компонент смеси; $p \in C^1(0, \infty)$ — давление (является заданной функцией плотности ρ), причем $p > 0$, $\dfrac{dp}{d\rho} > 0$; постоянные коэффициенты вязкостей ν_{ij}, $i, j = 1, \dots, N$ образуют симметричную матрицу $\mathbf{N} > 0$; начальные данные $\rho_0 \in W_2^1(0, 1)$, $\rho_0 > 0$, $u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1)$, $i = 1, \dots, N$.

Как видно в уравнениях (2) присутствуют старшие производные (производные второго порядка) от скоростей всех компонент, ввиду составной структуры тензоров вязких напряжений составляющих смеси [1]. Вследствие этого, результаты известные для одномерных баротропных уравнений Навье-Стокса автоматически не переносятся на уравнения (1), (2). Отметим, что вопросы об асимптотическом поведении решений одномерных уравнений Навье-Стокса исследовались в работах [2]–[7]. Существование, единственность и асимптотическое поведение решений при $t \to +\infty$ рассматриваемых одномерных уравнений вязких многокомпонентных смесей в изотермическом и политропном случаях изучались в работах [8]–[13]. Аналогичным вопросам для смежных одномерных моделей многокомпонентных смесей посвящены работы [14]–[21].

2. Массовые лагранжевы координаты

При анализе задачи (1)–(4) будет использовать массовые лагранжевы координаты. Возьмем за новые независимые переменные t и $y(t, x) = \int\limits_0^x \rho(t, s)\, ds$. В этом случае система (1), (2) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial p(\rho)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\rho \frac{\partial u_j}{\partial y}\Big), \quad i = 1, \dots, N. \tag{6}$$

При таком переходе область течения Ω отображается в область $\widetilde{\Omega} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < d\}$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0(x)\, dx > 0$. Начальные и граничные условия преобразуются к следующему виду:

$$\rho|_{t=0} = \widetilde{\rho}_0(y), \quad u_i|_{t=0} = \widetilde{u}_{0i}(y), \quad i = 1, \dots, N, \tag{7}$$

$$u_i|_{y=0} = u_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{8}$$

3. Априорные оценки

Получим равномерные по времени оценки, позволяющие сделать вывод об асимптотическом поведении решения задачи (1)–(4) при $t \to +\infty$. Для этого умножим уравнения (2) на u_i, просуммируем по i и проинтегрируем по y, получим (с учетом (1))

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx + \sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)\,dx = -\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int\limits_0^1 u_i\left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial x}\right)dx. \tag{9}$$

Поскольку $\mathbf{N} > 0$, то для второго слагаемого в левой части (9) справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)\,dx \geqslant C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)^2 dx \tag{10}$$

с некоторой положительной постоянной C_1. Теперь умножим уравнение (1) на $G'(\rho)$, где $G(\rho) = \rho\int\limits_d^\rho \frac{p(s)-p(d)}{s^2}ds$, проинтегрируем по x и для правой части (9) получим, что

$$-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int\limits_0^1 u_i\left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial x}\right)dx = \int\limits_0^1 p(\rho)\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\,dx = -\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 G(\rho)\,dx. \tag{11}$$

Благодаря (10) и (11), из (9) следует неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx + \frac{d}{dt}\int\limits_0^1 G(\rho)\,dx + C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x}\Big)^2 dx \leqslant 0. \tag{12}$$

В массовых лагранжевых координатах (t, y) формула (12) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d u_i^2\,dy + \frac{d}{dt}\int\limits_0^d \frac{G(\rho)}{\rho}\,dy + C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d \rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy \leqslant 0. \tag{13}$$

Из (13), после интегрирования по t, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^d u_i^2 dy + \int\limits_0^d \frac{G(\rho)}{\rho}\,dy + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy d\tau \leqslant C_2, \tag{14}$$

где постоянная $C_2 > 0$. Все слагаемые в левой части (14) неотрицательны.

Преобразуем теперь уравнения (6) к виду

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \widetilde{\nu}_{ij} \right) \frac{\partial p(\rho)}{\partial y} = \alpha_i \frac{\partial}{\partial y} \Big(\rho \frac{\partial u_i}{\partial y} \Big), \quad i = 1, \dots, N, \tag{15}$$

где через $\widetilde{\nu}_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$ мы обозначили компоненты матрицы $\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1}$. Просуммируем (15) по i, получим

$$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \widetilde{K} \frac{\partial p(\rho)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \Big(\rho \frac{\partial v}{\partial y} \Big), \tag{16}$$

где постоянная $\widetilde{K} = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \widetilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j > 0$. Отметим также, что из уравнения (5) следует, что

$$\rho \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial \ln \rho}{\partial t}. \tag{17}$$

Далее, подставим $\rho \dfrac{\partial v}{\partial y}$ из (17) в равенство (16), и получим соотношение

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t \partial y} + \widetilde{K} \frac{\partial p(\rho)}{\partial y} = - \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t}. \tag{18}$$

Умножая обе части (18) на $\dfrac{\partial \ln \rho}{\partial y}$ и интегрируя по y, приходим к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^d \Big(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \Big)^2 dy + \widetilde{K} \int_0^d \left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right) dy = - \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \Big(\frac{\partial u_j}{\partial t} \Big) \Big(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \Big) dy. \tag{19}$$

Преобразуем правую часть (19), используя формулу интегрирования по частям и (8), (17):

$$- \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \Big(\frac{\partial u_j}{\partial t} \Big) \Big(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \Big) dy = - \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d u_j \Big(\frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \Big) dy + \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \widetilde{\nu}_{ij} \int_0^d \rho \Big(\frac{\partial u_j}{\partial y} \Big) \Big(\frac{\partial v}{\partial y} \Big) dy. \tag{20}$$

Тогда перепишем (19) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2dy+\widetilde{K}\int\limits_0^d\left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial y}\right)\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)dy=$$
$$=-\frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^N\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d u_j\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)\,dy+\sum_{i,j=1}^N\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d\rho\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\,dy. \tag{21}$$

Проинтегрируем равенство (21) по t, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2dy+\widetilde{K}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial y}\right)\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)dyd\tau=$$
$$=-\sum_{i,j=1}^N\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d u_j\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)\,dy+\sum_{i,j=1}^N\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\,dyd\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^d\frac{1}{\widetilde{\rho}_0^2}\Big(\frac{\partial\widetilde{\rho}_0}{\partial y}\Big)^2dy+\sum_{i,j=1}^N\alpha_i\widetilde{\nu}_{ij}\int\limits_0^d\frac{\widetilde{u}_{0j}}{\widetilde{\rho}_0}\Big(\frac{\partial\widetilde{\rho}_0}{\partial y}\Big)\,dy.$$

Отсюда и из (14) теперь следует оценка

$$\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2dy+\int\limits_0^t\int\limits_0^d\rho p'(\rho)\Big(\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\Big)^2dyd\tau\leqslant C_3 \tag{22}$$

с постоянной $C_3>0$.

Далее, из уравнения (5) следует, что при каждом $t\in[0,T]$ хотя бы в одной точке $\xi(t)\in[0,d]$

$$\rho(t,\xi(t))=d. \tag{23}$$

Тогда, т. к.

$$\ln\rho(t,y)=\ln\rho(t,\xi(t))+\int\limits_{\xi(t)}^y\frac{\partial(\ln\rho(t,s))}{\partial s}\,ds,$$

то используя неравенство Гельдера, с учетом (22) и (23), получим

$$|\ln\rho(t,y)|\leqslant|\ln d|+\sqrt{d}\left\|\frac{\partial\ln\rho}{\partial y}\right\|_{L_2(0,d)}\leqslant C_4,\quad C_4=\mathrm{const}>0.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$0<\frac{1}{C_5}\leqslant\rho(t,y)\leqslant C_5<+\infty,\quad C_5=\mathrm{const}>0. \tag{24}$$

Таким образом, из (14), (22) и (24) следует, что

$$\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2dyd\tau+\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)^2dy+\int\limits_0^t\int\limits_0^d\Big(\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big)^2dyd\tau\leqslant C_6 \tag{25}$$

с постоянной $C_6>0$.

Приступим к выводу дальнейших оценок. Умножим (6) на $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}$ и проинтегрируем по y, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy + \sum_{j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^d \rho\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\Big)\,dy = \tag{26}$$
$$= -\sum_{j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial \rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\,dy + \alpha_i\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial p(\rho)}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\,dy.$$

Просуммируем (26) по i и проинтегрируем по t:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \rho\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\Big)\,dyd\tau = \tag{27}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial \widetilde{u}_{0i}}{\partial y}\Big)^2 dy - \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial \rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\,dyd\tau +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial p(\rho)}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big)\,dyd\tau.$$

Для левой части (27) имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \rho\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2}\Big)\,dyd\tau \geqslant \tag{28}$$
$$\geqslant C_7\Big(\sum_{i=1}^N\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big)^2 dy + \sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)^2 dyd\tau\Big), \quad C_7 = \mathrm{const} > 0.$$

Для второго слагаемого в правой части (27), ввиду оценки (25) и неравенств $(i = 1, \ldots, N)$

$$\Big\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big\|^2_{C[0,d]} \leqslant 2\Big\|\frac{\partial u_i}{\partial y}\Big\|_{L_2(0,d)}\Big\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big\|_{L_2(0,d)}, \tag{29}$$

справедлива оценка

$$-\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^t\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial \rho}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)\Big(\frac{\partial u_j}{\partial y}\Big)\,dyd\tau \leqslant \tag{30}$$
$$\leqslant \frac{C_7}{4}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^t\int\limits_0^d \Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\Big)^2 dyd\tau + C_8, \quad C_8 = \mathrm{const} > 0.$$

Третье слагаемое в правой части (27) оценим следующим образом:

$$(31)\quad \int\limits_0^t \int\limits_0^d \left(\frac{\partial p(\rho)}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) dy d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_7}{4}\sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_0^d \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2 dy d\tau + C_9, \quad C_9 = \text{const} > 0.$$

В итоге, из (27), благодаря (28), (30) и (31), следует оценка

$$(32)\quad \sum_{i=1}^N \int\limits_0^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dy + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_0^d \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)^2 dy d\tau \leqslant C_{10}, \quad C_{10} = \text{const} > 0.$$

Наконец, интегрируя (26) по t, приходим к неравенствам

$$(33)\quad \int\limits_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 dy \right| d\tau \leqslant C_{11}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad C_{11} = \text{const} > 0.$$

4. Асимптотическое поведение решения при неограниченном возрастании времени

Из (25) и (33) непосредственно следуют при $t \to +\infty$ сходимости

$$(34)\quad \left\| \frac{\partial u_i}{\partial y} \right\|_{L_2(0,d)} \to 0, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Дифференцируя (5) по y и умножая на $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$, с использованием (29), получаем оценку

$$(35)\quad \int\limits_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \int\limits_0^d \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 dy \right| d\tau \leqslant C_{12}, \quad C_{12} = \text{const} > 0.$$

Следовательно, при $t \to +\infty$

$$(36)\quad \left\| \frac{\partial \rho}{\partial y} \right\|_{L_2(0,d)} \to 0.$$

Таким образом доказано (см. (23)), что в норме $W_2^1(0,d)$ при $t \to +\infty$

$$(37)\quad u_i \to 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \rho \to d.$$

Несложно проверить теперь, что такие же сходимости имеют место в эйлеровых переменных в норме $W_2^1(0,1)$.

References

[1] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 388–397.

[2] A. A. Zlotnik, B. Ducomet, *Stabilization rate and stability for viscous compressible barotropic symmetric flows with free boundary for a general mass force*, Sb. Math., **196**:12 (2005), 1745–1799.

[3] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global properties of solutions to 1D–viscous compressible barotropic fluid equations with density dependent viscosity*, Z. Angew. Math. Phys., **54**:4 (2003), 593–607.

[4] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global behavior of 1d-viscous compressible barotropic fluid with a free boundary and large data*, J. Math. Fluid Mech., **5**:2 (2003), 119–143.

[5] A. A. Zlotnik, *Equations of one–dimensional motion of a viscous barotropic gas in the presence of mass force*, Siberian Math. J., **33**:5 (1992), 798–815.

[6] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1990.

[7] A. V. Kazhikhov, *Stabilization of solutions of an initial–boundary-value problem for the equations of motion of a barotropic viscous fluid*, Differ. Equations, **15**:4 (1979), 463–467.

[8] D. A. Prokudin, *On the stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one–dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathematics, **11**:14 (2023), 3065, 11 pp.

[9] D. A. Prokudin, *On the stabilization of solutions to the initial-boundary value problem for the equations of dynamics of viscous compressible multicomponent media*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1278–1285.

[10] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **21**:1 (2019), 9, 10 pp.

[11] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for one-dimensional equations of polytropic flows of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 631–649.

[12] D. A. Prokudin, *Unique solvability of initial–boundary value problem for a model system of equations for the polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 568–585.

[13] D. A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, J. Phys. Conf. Ser., **894** (2017), 012076, 6 pp.

[14] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Global unique solvability of an initial–boundary value problem for the one-dimensional barotropic equations of binary mixtures of viscous compressible fluids*, J. Appl. Industr. Math., **15**:1 (2021), 50–61.

[15] S. Li, *On one–dimensional compressible Navier–Stokes equations for a reacting mixture in unbounded domains*, Z. Angew. Math. Phys., **68** (2017), 106, 24 pp.

[16] D. Bresch, X. Huang, J. Li, *Global weak solutions to one–dimensional non–conservative viscous compressible two–phase system*, Commun. Math. Phys., **309** (2012), 737–755.

[17] A. A. Papin, *On the uniqueness of the solutions of an initial boundary–value problem for the system of a heat–conducting two–phase mixture*, Math. Notes, **309** (2010), 594–598.

[18] A. A. Zlotnik, *Weak solutions to the equations of motion of viscous compressible reacting binary mixtures: Uniqueness and Lipschitz-continuous dependence on data*, Math. Notes, **75** (2004), 278–283.

[19] A. A. Zlotnik, *Uniform estimates and stabilization of solutions to equations of one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture*, Math. Notes, **58** (1995), 885–889.

[20] A. N. Petrov, *Well–posedness of initial-boundary value problems for one–dimensional equations of mutually penetrating flows of ideal gases*, Din. Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 105–121.

[21] A. V. Kazhikov, A. N. Petrov, *Well–posedness of the initial–boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Din. Sploshnoy Sredy, **35** (1978), 61–73.

Alexander Evgenyevich Mamontov, Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Lavrent'eva, 15,
630090 Novosibirsk, Russia
and
Chair of Further Mathematics,
Federal State Institution of Higher Education «Siberian State University of Telecommunications and Information Science»
st. Kirova, 86,
630102 Novosibirsk, Russia
Email address: aem@hydro.nsc.ru, prokudin@hydro.nsc.ru