

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА РЭЛЕЯ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ КУЛОНОВСКОГО ТИПА

Р.К. ГАЙДУКОВ 

Представлено

Abstract: In this paper we study a Rayleigh-type equation on a semi-infinite cylinder with a Coulomb-type potential. This equation arises in the double-deck boundary layer structure in the problem of flow induced by a uniformly rotating disk with small periodic irregularities on its surface for large Reynolds numbers. Using combined numerical and analytical approach, the existence of a unique solution to the Rayleigh-type equation is proven.

Keywords: existence and uniqueness of solution, Rayleigh-type equation, double-deck structure.

1 Введение

Двухпалубная структура пограничного слоя, наряду с широко известной трехпалубной [1, 2, 3, 4], является одной из широко используемых математических моделей пограничного слоя в задачах обтекания малых неровностей, допускающих явление отрыва пограничного слоя от обтекаемой поверхности. В рамках этих моделей, исходная система уравнений

GAYDUKOV, R.K., EXISTENCE OF SOLUTION OF RAYLEIGH-TYPE EQUATION ON SEMI-INFINITE CYLINDER WITH COULOMB-TYPE POTENTIAL.

© 2023 Гайдуков Р.К..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-10003.

Поступила 1 ноября 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

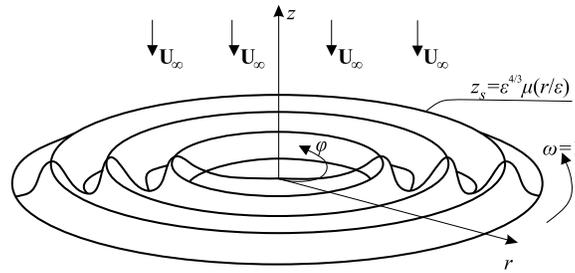


Рис. 1. Вращающийся диск с малыми периодическими неровностями, из [14]

Навье–Стокса и неразрывности с помощью различных асимптотических методов редуцируется к более простым задачам, допускающим простое аналитическое или численное решение, см. подробнее [5, 6]. Такой подход позволяет избежать ресурсоемкого прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса в области, содержащей несколько разных масштабов, порождаемых геометрией обтекаемой неровности.

В задаче обтекания быстроосциллирующих неровностей двухпалубная структура впервые была открыта в работе В.Г. Данилова и М.В. Макаровой [7], и с тех пор она активно исследовалась в различных задачах обтекания — течения вдоль пластин с шероховатостями [8, 9, 10, 11, 12], течения в трубах и каналах с шероховатыми стенками [13]. В одной из недавних работ [14], двухпалубная структура была получена в задаче о течении, индуцированном равномерно вращающимся диском с малыми шероховатостями на его поверхности, в том числе — с малыми периодическими (быстроосциллирующими) неровностями, см. рис. 1. Отметим, что многопалубные структуры для такого класса задач ранее практически не рассматривались, помимо [14] известна лишь одна работа [15].

Однако, помимо непосредственно самого вывода уравнений с помощью асимптотических методов, что было сделано в [14], возникает вопрос о существовании решений получившихся редуцированных уравнений. Ответ на этот вопрос равносильен ответу на вопрос о существовании двухпалубной структуры в рассматриваемой задаче.

Двухпалубная структура состоит из нижней палубы (см. область I на рис. 2) — тонкого пограничного слоя и средней палубы (см. область II на рис. 2) — области классического пограничного слоя Прандтля. Отметим, что такие названия являются общепринятыми в теории многопалубных структур (например, см. [3, 2]). Течение на нижней палубе описывается системой уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением (см. (5) ниже), которая широко исследована во множестве работ, см., например, [8, 9, 10, 11]. А осцилляции течения в средней палубе описываются уравнением типа Рэлея (см. (6) ниже), которое отличается

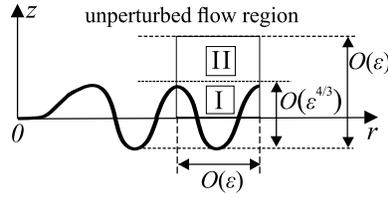


Рис. 2. Сечение (r, z) рассматриваемой геометрии и двухпалубная структура I — нижняя палуба, II — средняя палуба

от аналогичного для случая обтекания пластины [5, 9, 16] — потенциалы в них кардинально различаются. А именно, в случае течения, индуцированного вращающимся диском, потенциал в уравнении типа Рэлея есть потенциал типа Кулона, см. рис. 3, а в случае течения вдоль пластины [16] потенциал представлял собой малую потенциальную яму, для которого в [16] было доказано существование единственного решения уравнения типа Рэлея. Поэтому результаты исследования уравнения типа Рэлея для пластины [16] не могут быть просто перенесены на исследуемый в данной работе случай.

Для дальнейшего изложения, необходимо привести результаты из работы [14]. Как отмечено выше, в данной работе двухпалубная структура построена для стационарной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости, индуцированном равномерно вращающимся с безразмерной угловой скоростью $\omega = 1$ диском с малыми периодическими неровностями при больших значениях числа Рейнольдса Re . Отметим, что рассматривается аксиально-симметричный случай. Пусть (r, φ, z) — безразмерная цилиндрическая система координат, ось z совпадает с осью вращения диска, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\mathbf{U} = (u(r, z), v(r, z), w(r, z))$ — безразмерный вектор скорости, $p(r, z)$ — безразмерное давление, а поверхность диска имеет вид $z_s = \varepsilon^{4/3} \mu(r, r/\varepsilon)$, где $\varepsilon = Re^{-1/2}$ — малый параметр, функция $\mu = \mu(r, \xi)$ — некоторая гладкая 2π — периодическая по ξ функция, такая, что $\frac{\partial^k \mu(r, \xi)}{\partial r^k} \Big|_{r=0} = 0$, $k = 0, 1, 2$ (неровности гладко начинаются на некотором маленьком расстоянии δ от центра диска), $\int_0^{2\pi} \mu(r, \xi) d\xi = 0$, см. рис. 1. Значение δ такое, что классический пограничный слой фон Кармана [17] уже сформировался на этом расстоянии.

Хорошо известно [18], что в задачах о течениях, индуцированных равномерно вращающимся диском, радиальная компонента u вектора скорости преобладает, и для выполнения уравнения неразрывности возникает постоянный «поддерживающий» поток $\mathbf{U}_\infty = (0, 0, -\varepsilon u_\infty)$, направленный противоположно оси z , где u_∞ определяется в процессе решения задачи (см. подробнее в Теореме 1 ниже). Рассматриваемая задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности [19], дополненной условиями прилипания $\mathbf{U}|_{z=z_s} = (0, \omega r, 0)$ и условиями согласования с «поддерживающим» потоком $\mathbf{U}|_{z \rightarrow \infty} = \mathbf{U}_\infty$.

Введем следующие обозначения: для любой функции $f = f(\xi, \circ)$,¹ определим *среднее значение* по формуле $\bar{f}(\circ) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi, \circ) d\xi$, *осциллирующую часть* согласно формуле $\tilde{f}(\xi, \circ) = f(\xi, \circ) - \bar{f}(\circ)$, и *осциллирующую первообразную* $F(\xi, \circ) = \int^\xi \tilde{f}(\xi, \circ) d\xi$ так, что $\bar{F} = 0$.

В работе [14] получено следующее асимптотическое решение рассматриваемой задачи.

Теорема 1. Пусть $r \geq \delta > 0$. Тогда формальное асимптотическое решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$u(r, z) = rf(\tau) + \varepsilon^{1/3} [u_1^I(r, \xi, \theta) + \mu(r, \xi)rf'(\tau)] + O(\varepsilon^{2/3}), \quad (1)$$

$$v(r, z) = rg(\tau) + \varepsilon^{1/3} [v_1^I(r, \xi, \theta) + \mu(r, \xi)rg'(\tau)] + O(\varepsilon^{2/3}), \quad (2)$$

$$w(r, z) = \varepsilon^{2/3} [w_2^I(r, \xi, \theta) + \tilde{w}_2^{II}(r, \xi, \tau)] + \varepsilon \left[w_3^I(r, \xi, \theta) + \tilde{w}_3^{II}(r, \xi, \tau) + h(\tau) + \mu \frac{\partial \tilde{w}_2^{II}}{\partial \tau} \right] + O(\varepsilon^{4/3}), \quad (3)$$

где $\theta = (z - z_s)/\varepsilon^{4/3}$, $\tau = (z - z_s)/\varepsilon$, $\xi = r/\varepsilon$, и $r_0 = \text{const}$. Здесь пограничные переменные (ξ, θ) используются в нижней палубе (см. область I на рис. 2), а переменные (ξ, τ) — в средней палубе (см. область II на рис. 2). Отметим, что искривленная граница обтекаемой поверхности $z = z_s$ станет плоской в переменных θ и τ (т.е., $\theta = 0$ и $\tau = 0$).

Функции $f(\tau)$, $g(\tau)$ и $h(\tau)$ являются решением классической системы ОДУ фон Кармана [18, 17] (она является решением невозмущенной задачи)

$$\begin{aligned} f^2 - g^2 + hf' - f'' &= 0, & 2fg + hg' - g'' &= 0, & 2f + h' &= 0, & (4) \\ f(0) = h(0) &= 0, & g(0) &= 1, & f(\infty) = g(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Скорость «поддерживающего» потока u_∞ определяется как $u_\infty = -h|_{\tau \rightarrow \infty}$.

Функции $u_1^I(r, \xi, \theta)$, $v_1^I(r, \xi, \theta)$, $w_2^I(r, \xi, \theta)$ имеют вид

$$u_1^I = u_1^* - (\theta + \mu(r, \xi))rf'(0), \quad w_2^I = w_2^* - \tilde{w}_2^{II}|_{\tau=0}, \quad v_1^I = v_1^* - \theta rg'(0),$$

¹Символ \circ обозначает любые другие переменные.

где функции $u_1^*(r, \xi, \theta)$, $v_1^*(r, \xi, \theta)$, $w_2^*(r, \xi, \theta)$ являются решением краевой задачи для системы уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением

$$\begin{cases} u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \right) + w_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2} - r f'(0) w_2^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = 0, \\ u_1^* \left(\frac{\partial v_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} \right) + w_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \theta^2} = 0, \\ \frac{\partial w_2^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} = 0, \\ u_1^* \Big|_{\theta=0} = w_2^* \Big|_{\theta=0} = 0, \quad v_1^* \Big|_{\theta=0} = -\mu(r, \xi) r g'(0), \\ w_2^* \Big|_{\xi} = w_2^* \Big|_{\xi+2\pi}, \quad u_1^* \Big|_{\xi} = u_1^* \Big|_{\xi+2\pi}, \quad v_1^* \Big|_{\xi} = v_1^* \Big|_{\xi+2\pi}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow r f'(0), \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} r f'(0), \quad \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow r g'(0), \quad \frac{\partial w_2^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5)$$

Радиус r играет в этой задаче роль параметра — расстояние от центра диска, на котором исследуется течение.

Функция \tilde{w}_2^{II} является решением краевой задачи для уравнения типа Рэлея

$$f(\tau) \Delta_{\xi, \tau} \tilde{w}_2^{\text{II}} = \tilde{w}_2^{\text{II}} f''(\tau), \quad (6)$$

$$\tilde{w}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} = \tilde{w}_2^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty}, \quad \tilde{w}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{w}_2^{\text{II}} \Big|_{\xi} = \tilde{w}_2^{\text{II}} \Big|_{\xi+2\pi}, \quad (7)$$

где $\Delta_{\xi, \tau}$ — оператор Лапласа по переменным ξ и τ .

Остальные функции, входящие в разложения (1)–(3), равно как и выражение для давления $p(r, z)$, не представляют интереса в рамках данной работы, см. подробности в [14].

2 Уравнение типа Рэлея

Для удобства, введем следующие обозначения: $q(\xi, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{w}_2^{\text{II}}(\xi, \tau)$, $\gamma(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{w}_2^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty}$. Перепишем задачу (6), (7) виде:

$$-\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + V(\tau)q = 0, \quad (8)$$

$$q \Big|_{\tau=0} = \gamma, \quad q \Big|_{\tau \rightarrow \infty} = 0, \quad q \Big|_{\xi} = q \Big|_{\xi+2\pi}, \quad (9)$$

где потенциал $V(\tau) = f''(\tau)/f(\tau)$, $f(\tau)$ — решение задачи (4), см. [18, 20]. Отметим, что задача (4) эффективно решается численно комбинацией метода стрельбы и метода Рунге–Кутты, при этом получают следующие дополнительные краевые условия [20]

$$f'(0) = \alpha \approx 0.51023, \quad g'(0) = \beta \approx -0.61592, \quad (10)$$

при этом «поддерживающая» скорость равна $u_\infty \approx 0.88446$.

Потенциал $V(\tau)$ изображен на рис. 3. Отметим, что ноль потенциала достигается в точке $\tau \approx 1.81197$, и он ограничен своим значением при $\tau \rightarrow \infty$: $V|_{\tau \rightarrow \infty} \approx 0.78227$. Для функции $f(\tau)$ несложно написать асимптотики при $\tau \rightarrow +0$ и $\tau \rightarrow \infty$ (см. [18]):

$$f(\tau) = \alpha\tau - \frac{1}{2}\tau^2 + O(\tau^3), \quad \tau \rightarrow +0,$$

$$f(\tau) = Ae^{-u_\infty\tau} + O(e^{-2u_\infty\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty,$$

где $A \approx 0.93$. Тогда для потенциала $V(\tau)$ имеем следующие асимптотики

$$V(\tau) = \frac{-1 + O(\tau)}{\alpha\tau + O(\tau^2)} = -\frac{1}{\alpha\tau}(1 + O(\tau)), \quad \tau \rightarrow +0, \quad (11)$$

$$V(\tau) = u_\infty^2(1 + O(e^{-u_\infty\tau})), \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Отметим, что уравнение (8) с одной стороны проще, чем уравнение типа Рэля для случая пластины [16], т.к. в данном случае оно не содержит параметра, но с другой стороны, потенциал $V(\tau)$ имеет особенность при $\tau \rightarrow +0$, см. (11).

Разложим функцию q в ряд Фурье:

$$q = \sum_{k \neq 0} q_k(\tau) e^{ik\xi} \quad (13)$$

($k \neq 0$ т.к. $\bar{q} = \int_0^{2\pi} q(\tau, \xi) d\xi = 0$ по ее определению). Тогда задача (8), (9) примет вид

$$-q_k'' + (V + k^2)q_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus 0, \quad (14)$$

$$q_k(0) = \gamma_k, \quad q_k|_{\tau \rightarrow \infty} = 0,$$

где γ_k — коэффициенты разложения функции $\gamma(\xi)$.

Перейдем от задачи (14) к задаче с нулевыми краевыми условиями. Введем срезающую функцию $g_k(\tau) \in C^\infty[0, +\infty)$, такую что $g_k|_{\tau=0} = 1$,

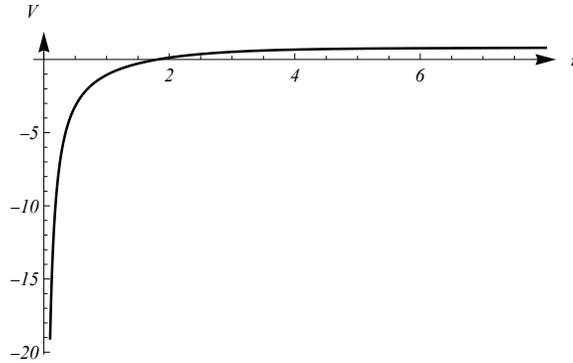


Рис. 3. Потенциал $V(\tau)$

$g_k|_{\tau \rightarrow \infty} = O(\tau^{-N}) \forall N \in \mathbb{Z}_+$. Введем новую функцию

$$\varphi_k(\tau) = q_k(\tau) - g_k(\tau)\gamma_k.$$

Тогда задача (14) примет вид

$$\begin{aligned} (\hat{L} + k^2)\varphi_k &= -\gamma_k(\hat{L} + k^2)g_k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus 0, \\ \varphi_k(0) &= 0, \quad \varphi_k|_{\tau \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где оператор

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + V(\tau). \quad (16)$$

Очевидно, что уравнение (15) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $-k^2$ не является собственным числом оператора \hat{L} — только в этом случае $\text{Ker} \hat{L} = \emptyset$. Сформулируем результат в виде следующего утверждения.

Лемма 1. *Решение уравнения типа Рэля (8) существует и единственно тогда и только тогда, когда спектр оператора \hat{L} (16) не содержит отрицательных целочисленных ($-k^2, k \in \mathbb{Z} \setminus 0$) собственных значений.*

3 Спектр оператора \hat{L}

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$-\psi''_{\tau\tau} + V\psi = E\psi, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\infty) = 0. \quad (17)$$

Нашей целью является показать, что у задачи (17) нет отрицательных целочисленных собственных значений.

Пусть $\hat{V}(\tau) = V(\tau) - u_\infty^2$. Тогда из (11), (12) следует, что $\hat{V}(\tau) = -1/(\alpha\tau) + O(1)$ при $\tau \rightarrow +0$, и $\hat{V}(\tau) = O(e^{-u_\infty\tau})$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Обозначим $\hat{E} = E - u_\infty^2$. Тогда задача (17) примет вид

$$-\psi''_{\tau\tau} + \hat{V}\psi = \hat{E}\psi, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\infty) = 0. \quad (18)$$

Отметим, что фактически нам нужно показать, что в задаче (18) не существует такого собственного числа \hat{E} , что $\hat{E} + u_\infty^2 \in \mathbb{Z}_-$. Вообще говоря, с учетом того, что $u_\infty^2 \notin \mathbb{Z}$, весьма очевидно, что это верно.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$-y''_{\tau\tau} - \frac{1.1}{\alpha\tau}y = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(\infty) = 0. \quad (19)$$

Сделав замену $\eta = \tau/(\alpha/1.1)$, получим спектральную задачу с потенциалом Кулона

$$-y''_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}y = \hat{\lambda}y \quad y(0) = 0, \quad y(\infty) = 0, \quad (20)$$

где $\hat{\lambda} = (\alpha/1.1)^2\lambda$. Ее решение известно [21]: непрерывный спектр $(0, +\infty)$ и серия отрицательных дискретных собственных значений

$$\hat{\lambda}_i = -\frac{1}{4(i+1)^2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

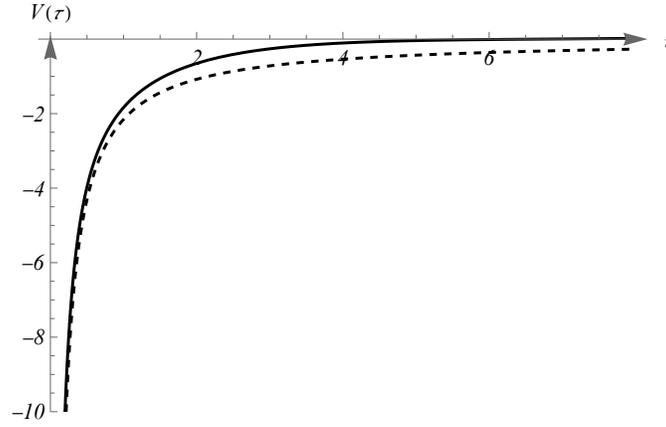


Рис. 4. Потенциалы $\hat{V}(\tau)$ (сплошная линия) и $V_1(\tau) = -1.1/(\alpha\tau)$ (пунктирная линия)

Видно, что $0 > \hat{\lambda}_i \geq -1/4$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что отрицательный дискретный спектр исходной задачи (19) имеет вид $\lambda_i = \hat{\lambda}_i/(\alpha/1.1)^2 \notin \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Более того, легко видеть, что $\lambda_i \in [-1/(4(\alpha/1.1)^2), 0)$, где $-1/(4(\alpha/1.1)^2) \approx -1.163$, т.е. $\lambda_i \in [-1.163, 0)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, причем очевидно что $\lambda_i \neq -1$ (в силу множителя $1/(\alpha/1.1)$).

Потенциал \hat{V} в задаче (18) больше² потенциала из вспомогательной задачи (см. рис. 4):

$$\hat{V} > -\frac{1.1}{\alpha\tau} = V_1(\tau), \quad \tau \in (0, +\infty).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \hat{V} \right) \psi, \psi \right\rangle &= \left\langle \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V_1 + \hat{V} - V_1 \right) \psi, \psi \right\rangle = \\ &= \underbrace{\left\langle \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V_1 \right) \psi, \psi \right\rangle}_{\geq -1.163\|\psi\|^2} + \underbrace{\langle (\hat{V} - V_1)\psi, \psi \rangle}_{\geq 0} \geq -1.163\|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{E} \geq -1.163$ (т.к. $\|\psi\| = 1$). Значит, собственные значения оператора \hat{L}

$$E \geq -1.163 + u_\infty^2 \approx -0.38.$$

Тогда очевидно, что не существует такого $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$, что $-k^2 = E$. В итоге мы доказали следующее утверждение.

²В силу отсутствия аналитического выражения для \hat{V} это можно лишь проверить численно, откуда и была подобрана константа 1.1. В окрестности нуля и бесконечности это неравенство строго обусловлено асимптотикой (11), (12) с учетом замены V на \hat{V}

Лемма 2. *Спектр оператора \hat{L} не содержит отрицательных целочисленных ($-k^2$, $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$) собственных значений.*

Данная лемма доказывает существование единственного решения уравнения типа Рэлея (6), см. Лемму 1. Отметим, что конечно этот подход не полностью строгий, т.к. основан на комбинации как аналитических, так и численных методов, но в силу отсутствия явной аналитической формы решения краевой задачи для уравнения типа Рэлея, полностью строгого (аналитического) доказательства не возможно представить.

4 Заключение

В работе доказано, что решение краевой задачи на уравнение типа Рэлея (6), (7) существует и единственно. Это доказывает существование и единственность двухпалубной структуры пограничного слоя в стационарной задаче о течении, индуцированном равномерно вращающимся диском с аксиально-симметричными быстросциллирующими малыми неровностями на его поверхности при достаточно больших числах Рейнольдса.

References

- [1] V.Ya. Neiland, *Theory of laminar boundary-layer separation in supersonic flow*, Fluid Dyn., **4** (1969), 33–35.
- [2] A.H. Nayfeh, *Triple-deck structure*, Comp. and Fluids, **20** (1991), 269–292.
- [3] F.T. Smith, *Laminar flow over a small hump on a flat plate*, J. Fluid Mech., **57** (1973), 803–824.
- [4] , S. Iyer, V. Vicol, *Real analytic local well-posedness for the triple deck*, Comm. on Pure and Appl. Math., **74**:8 (2021), 1641–1684.
- [5] V.G. Danilov, R.K. Gaydukov, *Asymptotic multiscale solutions to Navier–Stokes equations with fast oscillating perturbations in boundary layers*, Russ. J. Math. Phys., **29** (2022), 431–455.
- [6] V.G. Danilov, R.K. Gaydukov, *Asymptotic Solutions of Flow Problems with Boundary Layer of Double-Deck Structures*, Math. Notes, **112** (2022), 523–532.
- [7] V.G. Danilov, M.V. Makarova, *Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities*, Russ. J. Math. Phys., **2**:1 (1994), 49–56.
- [8] V.G. Danilov, R.K. Gaydukov, *Double-Deck Structure of the Boundary Layer in Problems of Flow around Localized Perturbations on a Plate*, Math. Notes, **98**:4 (2015), 561–571.
- [9] R.K. Gaydukov, *Double-deck structure of the boundary layer in the problem of a compressible flow along a plate with small irregularities on the surface*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **66** (2017), 102–108.
- [10] R.K. Gaydukov, *Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **89** (2021), 401–410.
- [11] R. Yapalparvi *Double-deck structure revisited*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **31** (2012), 53–70.
- [12] T.M.A. El-Mistikawy, *Asymptotic structure incorporating double and triple decks*, ZAMM, **89** (2009), 38–43.

- [13] V.G. Danilov, R.K. Gaydukov, *Double-deck structure of the boundary layer in the problem of flow in an axially symmetric pipe with small irregularities on the wall for large Reynolds numbers*, Russ. J. Math. Phys., **24**:1 (2017), 1–18.
- [14] R.K. Gaydukov, A.V. Fonareva, *Double-deck structure in the fluid flow induced by a uniformly rotating disk with small symmetric irregularities on its surface*, Eur. J. Mech. B/Fluids, **94** (2022), 50–59.
- [15] C. Chicchiero, A. Segalini, S. Camarri, *Triple-deck analysis of the steady flow over a rotating disk with surface roughness*, Phys. Rev. Fluids, **6** (2021), 014103.
- [16] R.K. Gaydukov, D.I. Borisov, *Existence of the Stationary Solution of a Rayleigh-Type Equation*, Math. notes, **99**:5 (2016), 636–642.
- [17] Th. Von Kármán *Über laminare und turbulente Reibung*, ZAMM, **1** (1921), 233–252.
- [18] V.G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, 1962.
- [19] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987.
- [20] H. Schlichting, K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*, Springer, 2000.
- [21] J. D. Pryce, *A Test Package for Sturm-Liouville Solvers*, ACM Trans. Math. Software, **26**:1 (1999), 21–57.

ROMAN KOSNTANTINOVICH GAYDUKOV
HSE UNIVERSITY,
UL. MYASNITSKAYA, 20,
101000, MOSCOW, RUSSIA
Email address: roma1990@gmail.com