

## ГРАФЫ ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРЫ С ПОЛНЫМ РАЗНООБРАЗИЕМ ШАРОВ\*)

А. А. Евдокимов<sup>1,2,a</sup>, Т. И. Федоряева<sup>1,2,b</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский гос. университет,  
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

*E-mail:* <sup>a</sup>evdok@math.nsc.ru, <sup>b</sup>fti@math.nsc.ru

**Аннотация.** Изучается разнообразие метрических шаров в конечных связных обыкновенных графах, рассматриваемых как метрическое пространство с обычной метрикой пути. Исследовано строение графов, в которых различны все шары фиксированного радиуса  $i$  для любого  $i$ , меньшего диаметра графа. Такие графы мы называем *графами полного разнообразия шаров*. Для них установлены свойства, связанные с наличием в них узких мест, и выяснена конфигурация блоков в графе. На основе полученных свойств описаны графы древовидной структуры с полным разнообразием шаров. Ил. 8, библиогр. 22.

**Ключевые слова:** граф, граф древовидной структуры, метрический шар, радиус шара, число шаров, вектор разнообразия шаров, полное разнообразие шаров.

### Введение

Пусть  $\mathcal{X} = (X, \rho)$  — конечное метрическое пространство и  $B_i^{\mathcal{X}}(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq i\}$  — шар радиуса  $i$  с центром в точке  $x$ . В случае дискретных метрических пространств шары заданного радиуса с центрами в различных точках пространства не всегда различны, а могут совпадать. Данный эффект, когда шар имеет несколько центров, наблюдается в графах, рассматриваемых как дискретное метрическое пространство с метрикой пути. Заметим, что при естественной интерпретации системы управления или коммуникационной сети графом множественность центров его шара позволяет, например, передавать управление с одного центра на другой, оставаясь при этом в зоне контроля или достижимости,

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке проекта РАН № 0314–2015–0011.

определяемой шаром, в случае, например, «отказа» некоторого центра. Постановка подобных вопросов надёжности информационного взаимодействия и обмена данными в пределах заданных областей (окрестностях центров) приводит к задачам исследования взаимосвязей свойств систем или сетей с наличием в них окрестностей с «множественным центром», их числе, возможностей «эффективного» покрытия такими областями всего пространства.

Рассмотрим покрытия пространства  $\mathcal{X}$  перекрывающимися шарами фиксированного радиуса (здесь приводится подход, предложенный в [8, 9]). Традиционно *плотность* таких покрытий определяется как среднее число шаров, содержащих точку пространства. Математической формализацией этого понятия может служить функция  $\Theta: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathbf{Q}^+$  [8], определяемая следующим образом:

$$\Theta(M) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} \theta_M(x),$$

где  $\mathcal{M}_i$  — совокупность всех покрытий пространства  $\mathcal{X}$  шарами радиуса  $i$ ,  $M \in \mathcal{M}_i$  и  $\theta_M(x)$  — число элементов покрытия  $M$ , содержащих точку  $x \in X$ . Ввиду конечности пространства  $\mathcal{X}$  существует покрытие с наибольшей плотностью. Такие покрытия естественным образом возникают, когда, например, требуется максимизировать плотность покрытия системы связи, износоустойчивость различного рода промышленных покрытий, защищённость для схем элементов, степень контроля и т. п. Функция плотности  $\Theta(M)$  строго возрастает на  $\mathcal{M}_i$  относительно порядка по включению: если  $M, M' \in \mathcal{M}_i$  и  $M \subset M'$ , то  $\Theta(M) < \Theta(M')$  [8]. Поэтому покрытие пространства  $\mathcal{X}$  шарами фиксированного радиуса  $i$  с наибольшей плотностью представляет собой систему всех различных шаров этого радиуса, а число элементов такого покрытия есть число различных шаров радиуса  $i$ , содержащихся в пространстве  $\mathcal{X}$  [9]. Такой подход (более детально см. в [8, 9]) приводит к интересным связям числа различных шаров фиксированного радиуса в конечном пространстве  $(X, \rho)$ , новым задачам и необходимости детального изучения этих чисел.

Пусть  $\tau_i(G)$  — число всех различных шаров радиуса  $i$  в метрическом пространстве обыкновенного связного графа  $G$  с обычным *расстоянием* между вершинами, т. е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины, и  $d(G)$  — диаметр графа  $G$ .

**Определение 1** [7]. Вектор  $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_{d(G)}(G))$  называется *вектором разнообразия шаров* связного графа  $G$ .

**Пример 1.** Дерево  $G_1$  диаметра 7 (рис. 1) имеет следующий вектор разнообразия шаров:  $\tau(G_1) = (16, 16, 16, 12, 8, 5, 3, 1)$ . Для нахождения этого вектора можно применить алгоритм вычисления вектора  $\tau(G)$  для произвольного заданного дерева  $G$ , найденный при описании векторов разнообразия шаров деревьев [7].

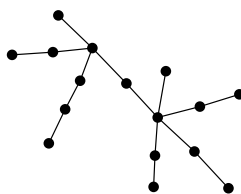


Рис. 1. Дерево  $G_1$

Заметим, что не всякий целочисленный вектор является вектором разнообразия шаров подходящего графа.

**Пример 2.** Целочисленный вектор  $(n, n, n, n, n, n, n-1, n-1, n-1, 1)$  при  $2 \leq n \leq 14$  не является вектором разнообразия шаров по теореме 4 из [8].

О проблеме характеристики векторов разнообразия шаров для графов см. в [3, 7, 12], а о связи свойств шаров в графах и вложениями дискретных метрических пространств — в [1].

Нетрудно заметить, что выполняется система соотношений:

$$\tau_0(G) = |V(G)| \geq \dots \geq \tau_i(G) \geq \tau_{i+1}(G) \geq \dots \geq \tau_{d(G)}(G) = 1,$$

где  $V(G)$  — множество вершин графа  $G$ . Поэтому среди всех графов естественным образом выделяются графы со следующим специальным разнообразием шаров (их роль также отмечена в [10]). Пусть  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  и  $0 \leq t < d(G)$ .

**Определение 2** [1]. Граф  $G$  обладает *локальным  $t$ -разнообразием шаров*, если  $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \dots = \tau_t(G)$ . Граф  $G$  с локальным  $t$ -разнообразием шаров при  $t = d(G) - 1$  называется графом *полного разнообразия шаров*.

Таким образом, вектор разнообразия шаров графа  $G$  с полным разнообразием шаров имеет вид  $(|V(G)|, \dots, |V(G)|, 1)$ .

**Пример 3.** Пусть  $K_n$  — нетривиальный полный  $n$ -вершинный граф,  $K_{1,n-1}$  —  $n$ -вершинная звезда,  $C_n$  — простой  $n$ -вершинный цикл [15].

Тогда

$$\begin{aligned} d(K_n) &= 1, & \tau(K_n) &= (n, 1), \\ d(K_{1,1}) &= 1, & \tau(K_{1,1}) &= (2, 1), \\ d(K_{1,n-1}) &= 2, & \tau(K_{1,n-1}) &= (n, n, 1) \quad \text{при } n \geq 3, \\ d(C_n) &= \lfloor n/2 \rfloor, & \tau(C_n) &= (n, \dots, n, 1) \quad \text{при } n \geq 3. \end{aligned}$$

Следовательно, все перечисленные графы обладают полным разнообразием шаров.

Классы графов с полным (локальным) разнообразием шаров исследованы в [1, 7, 8, 10–12]. В [7] получена характеристика деревьев с локальным разнообразием шаров. Наименьший порядок графов диаметра  $d$  с локальным  $t$ -разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) найден в [8], а в [10] с точностью до изоморфизма явно описаны все такие графы наименьшего порядка и вычислены их векторы разнообразия шаров. В [8] также установлены все возможные значения параметров  $n$ ,  $d$  и  $t$ , при которых существует  $n$ -вершинный граф диаметра  $d$  с полным разнообразием шаров (локальным  $t$ -разнообразием шаров). В [11] изучен вопрос единственности  $n$ -вершинного графа диаметра  $d$  с полным разнообразием шаров. Только при  $n = 2d \geq 6$ ,  $n = d + 1 = 3$  и  $n > d = 1$  существует единственный такой граф —  $2d$ -вершинный цикл при  $d \geq 3$  и простая цепь длины  $d$  при  $d = 1, 2$ . В [12] описаны векторы разнообразия шаров для почти всех графов заданного диаметра и исследовано свойство полного разнообразия шаров для помеченных  $n$ -вершинных графов в асимптотике. Доказано, что почти все графы фиксированного диаметра  $d \geq 3$  не обладают полным разнообразием шаров, при этом почти все графы диаметра  $d = 1, 2$  являются графами полного разнообразия шаров.

В настоящей работе исследуется строение графов полного разнообразия шаров и устанавливаются их свойства, связанные с наличием узких мест в графе. Выяснена конфигурация блоков в таких графах, она оказалась достаточно простой (теорема 1). В [7] из описания деревьев с локальным разнообразием шаров выведено, что класс деревьев с полным разнообразием шаров является бедным: он состоит лишь из звезды  $K_{1,n}$ , и поэтому не реализует всех графических векторов полного разнообразия шаров (описанных в теореме 2). В связи с этим интересен вопрос: что происходит при расширении класса деревьев? В статье исследуются графы со специальными блоками (более детально см. разд. 3), которые естественным образом расширяют класс деревьев, но при этом сохраняют древовидную структуру графа. На основе установленных в разд. 2 свойств такие графы с полным разнообразием шаров

описываются в разд. 3. Хотя сам рассмотренный класс графов образует достаточно существенный надкласс деревьев, такие графы с полным разнообразием шаров по-прежнему образуют узкий класс: цикл  $C_n$ , звезда  $K_{1,n}$  и нетривиальный полный граф  $K_n$  (теорема 3).

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [4, 15]. Рассматриваются только конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы, которые предполагаются связными, если не оговорено особо. Как обычно, через  $\rho_G(u, v)$  обозначим расстояние между вершинами  $u, v \in V(G)$  в метрическом пространстве графа  $G$  с метрикой пути  $\rho_G$ ,  $d(G) = \max_{u, v \in V(G)} \rho_G(u, v)$  — диаметр графа  $G$ ,  $\deg_G v$  — степень вершины  $v$  графа  $G$ ,  $G \setminus v$  — граф, полученный в результате удаления вершины  $v \in V(G)$  и всех инцидентных ей рёбер. Кратчайшая цепь длины  $d(G)$  называется *диаметральной цепью* графа  $G$ . Вершина  $v$  графа  $G$  *висячая*, если  $\deg_G v = 1$ , и *диаметральная*, если она является концом некоторой диаметральной цепи. Ребро графа  $G$  называется *мостом*, если его удаление увеличивает число компонент связности графа  $G$ . Максимальный по включению связный подграф без точек сочленения называется *блоком графа*, а связный граф без точек сочленения также называют *блоком*. Подграф  $H$  графа  $G$  *изометричный*, если  $\rho_H(u, v) = \rho_G(u, v)$  для всех  $u, v \in V(H)$ .

### 1. Предварительные сведения

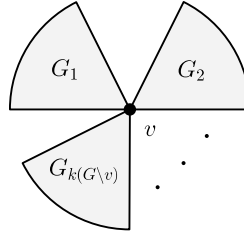
Пусть  $k(G)$  — число компонент связности графа  $G$ . Вершина  $v$  графа  $G$  является *точкой сочленения*, если  $k(G \setminus v) > k(G)$ . В этом случае  $k(G \setminus v) \geq 2$ , иными словами, граф  $G \setminus v$  содержит не менее двух компонент связности.

Используя свойства блоков (см., например, [4]), можно определить множества вершин  $V_1, \dots, V_{k(G \setminus v)}$  такие, что

$$V(G) = \bigcup_{1 \leq i \leq k(G \setminus v)} V_i,$$

$$V_i \cap V_j = \{v\} \text{ при } i \neq j, \quad V_i \setminus \{v\} \neq \emptyset$$

и любая цепь, соединяющая произвольные вершины  $x \in V_i$  и  $y \in V_j$  при  $i \neq j$ , содержит точку сочленения  $v$ . Через  $G_i$  обозначим порождённый подграф графа  $G$  с множеством вершин  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k(G \setminus v)$ . Тогда  $G_1 \setminus v, G_2 \setminus v, \dots, G_{k(G \setminus v)} \setminus v$  — все компоненты связности графа  $G \setminus v$ , и каждый граф  $G_i$  имеет ровно один блок графа  $G$ , содержащий вершину  $v$ . В дальнейшем связные графы  $G_i$  (рис. 2),  $i = 1, 2, \dots, k(G \setminus v)$ , будем называть *графами, определяемыми точкой сочленения  $v$*  [6].

Рис. 2. Графы, определяемые точкой сочленения  $v$ 

**Лемма 1** (о точках сочленения). *Граф с полным разнообразием шаров содержит не более одной точки сочленения.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть граф  $G$  диаметра  $d$  обладает полным разнообразием шаров и содержит точку сочленения  $v$ . Так как  $k(G \setminus v) \geq 2$ , имеем  $d \geq 2$ .

Предположим, что  $v$  — диаметральная вершина графа  $G$ . Тогда для некоторой вершины  $u$  выполняется равенство  $\rho_G(v, u) = d$ . Кроме того, найдётся вершина  $w$ , смежная с  $v$  и такая, что вершины  $u$  и  $w$  принадлежат различным графам, определяемым точкой сочленения  $v$ . Следовательно,  $\rho_G(w, u) = \rho_G(w, v) + \rho_G(v, u) > d$ ; противоречие. Поэтому  $B_{d-1}^G(v) = V(G)$ . Тогда если  $v_1, v_2$  — различные точки сочленения графа  $G$ , то  $B_{d-1}^G(v_1) = B_{d-1}^G(v_2)$ . Последнее равенство противоречит условию полного разнообразия шаров графа  $G$ . Лемма 1 доказана.

**Лемма 2** (о висячих вершинах). *Граф  $G$  диаметра  $d(G) \geq 3$  с полным разнообразием шаров содержит не более одной висячей вершины.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что в графе  $G$  есть различные висячие вершины  $u_1, u_2$ . Вершина, смежная с висячей, является точкой сочленения (за исключением случая, когда граф есть  $K_2$ ). Поэтому в силу леммы 1 вершины  $u_1$  и  $u_2$  смежны с некоторой точкой сочленения  $v$ . Тогда компонента связности графа  $G \setminus v$ , содержащая вершину  $u_i$ , состоит из единственной вершины  $u_i$ . Следовательно,  $B_2^G(u_1) = B_2^G(u_2)$ . Пришли к противоречию с полным разнообразием шаров графа  $G$ . Лемма 2 доказана.

Заметим, что условие  $d(G) \geq 3$  в лемме 2 существенно. Например, звезда  $K_{1,n}$ ,  $n \geq 2$  является графом полного разнообразия шаров и при этом имеет различные висячие вершины и мосты.

Из леммы 2 (а также из леммы 1) следует, что нет деревьев диаметра  $d \geq 3$ , обладающих полным разнообразием шаров. Кроме того, дерево диаметра  $d = 1, 2$  очевидно есть звезда.

**Следствие 1** [7]. *Дерево  $G$  является графом полного разнообразия шаров тогда и только тогда, когда  $G$  — звезда.*

**Лемма 3** (о мостах). *Граф  $G$  диаметра  $d(G) \geq 3$  с полным разнообразием шаров содержит не более одного моста, при этом один из его концов является висячей вершиной.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $e$  — произвольный мост графа  $G$ . Если каждый из его концов  $u, v$  не является висячей вершиной, то в  $G$  есть две точки сочленения  $u$  и  $v$ , что противоречит лемме 1. Поэтому один из концов ребра  $e$  является висячей вершиной. В силу леммы 2 и произвольности выбора моста  $e$  — единственный мост графа  $G$ . Лемма 3 доказана.

Следующий пример иллюстрирует лемму 3 (ранее свойство мостов из леммы 3 было анонсировано в [2]).

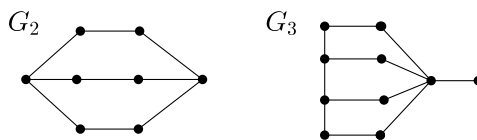


Рис. 3. Графы  $G_2$  и  $G_3$

**Пример 4.** Граф  $G_2$  диаметра 3 (рис. 3) обладает полным разнообразием шаров и не имеет мостов, а  $\tau(G_2) = (8, 8, 8, 1)$ . Граф  $G_3$  диаметра 3 (рис. 3) обладает полным разнообразием шаров и имеет единственный мост, один из концов которого является висячей вершиной, при этом  $\tau(G_3) = (10, 10, 10, 1)$ .

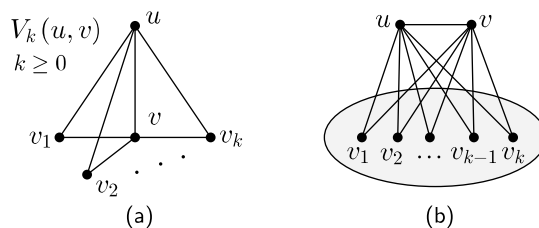


Рис. 4. Волан

Далее нам потребуется следующее простое описание графов диаметра 2 с полным разнообразием шаров.

**Определение 3** [6]. Граф  $V_k(u, v)$ , изображённый на рис. 4(a), называется *воланом на вершинах  $u, v$* . Граф  $G$  (не обязательно связный) имеет волан, если в  $G$  есть подграф  $V_k(u, v)$  и  $\deg_G u = \deg_G v = k + 1$  (рис. 4(b)).

**Утверждение 1** [6] (о графах диаметра 2). Граф  $G$  диаметра 2 обладает полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда  $G$  не содержит воланов.

## 2. Свойства графов полного разнообразия шаров

Пусть  $H_1, H_2$  — произвольные (не обязательно связные) графы с непесекающимися множествами вершин. Определим граф  $H_1 \otimes H_2$  (рис. 5) следующим образом. Пусть  $v \notin V(H_1) \cup V(H_2)$ . Полагаем

$$\begin{aligned} V(H_1 \otimes H_2) &= V(H_1) \cup \{v\} \cup V(H_2), \\ E(H_1 \otimes H_2) &= E(H_1) \cup E(H_2) \cup \{uv \mid u \in V(H_1) \cup V(H_2)\}. \end{aligned}$$

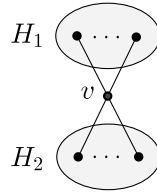


Рис. 5. Граф  $H_1 \otimes H_2$

Очевидно, что  $d(H_1 \otimes H_2) = 2$  и  $v$  — точка сочленения графа  $H_1 \otimes H_2$ .

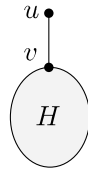


Рис. 6. Граф  $H \uparrow v$

Пусть  $H$  — связный граф и  $v \in V(H)$ . Определим граф  $H \uparrow v$  (рис. 6) следующим образом. Пусть  $u \notin V(H)$ . Полагаем

$$V(H \uparrow v) = V(H) \cup \{u\}, \quad E(H \uparrow v) = E(H) \cup \{uv\}.$$



Очевидно, что  $H \uparrow v$  — связный граф и вершина  $v$  является его точкой сочленения, если  $H$  — нетривиальный граф. Кроме того,  $d(H \uparrow v) = d(H) + 1$ , если  $v$  — диаметральная вершина графа  $H$ , и  $d(H \uparrow v) = d(H)$  в противном случае.

**Теорема 1** (о блоках). Пусть  $G$  — граф полного разнообразия шаров. Тогда выполняется в точности одно из следующих условий:

- (1)  $G$  — нетривиальный блок;
- (2)  $G = H_1 \otimes H_2$ , где графы  $H_1$  и  $H_2$  (не обязательно связные) не имеют воланов;
- (3)  $G = H \uparrow v$ , где  $H$  — блок диаметра не менее 3 и  $v$  — не диаметральная вершина графа  $H$ .

**Доказательство.** В силу определения 2 граф  $G$  не является тривиальным графом. Поэтому если  $G$  — блок, выполняется утверждение (1). Пусть граф  $G$  содержит некоторую точку сочленения  $v$  и  $d = d(G)$ . Тогда, как показано в доказательстве леммы 1, имеем  $d \geq 2$ .

Пусть  $d = 2$ . Рассмотрим графы  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k(G \setminus v)$ , определяемые точкой сочленения  $v$ . Полагаем

$$H_1 = G_1 \setminus v \text{ и } H_2 = (G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_{k(G \setminus v)}) \setminus v.$$

Пусть  $u \in V(G_i) \setminus \{v\}$ . Поскольку  $k(G \setminus v) \geq 2$ , получаем  $\rho_G(u, v) = 1$  (в противном случае для любой вершины  $w \notin V(G_i)$  имеем  $\rho_G(u, w) = \rho_G(u, v) + \rho_G(v, w) \geq 3$ ). Следовательно,  $G = H_1 \otimes H_2$ . Очевидно, что если граф  $G_i \setminus v$  содержит волан, то  $G$  также содержит волан. Поэтому в силу утверждения 1 графы  $H_1$  и  $H_2$  не содержат воланов. Таким образом, выполняется утверждение (2).

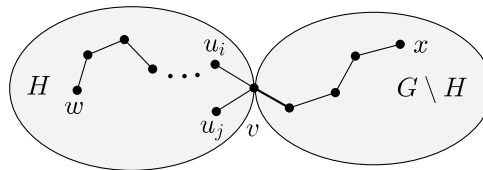


Рис. 7.

Пусть  $d \geq 3$ . Заметим, что существуют различные вершины  $u_1, u_2$ , смежные с  $v$  и принадлежащие некоторому одному графу  $H$  (рис. 7), определяемому точкой сочленения  $v$  графа  $G$  (в противном случае в  $G$  найдутся два моста, что противоречит лемме 3).

Так как граф  $G$  обладает полным разнообразием шаров, справедливо неравенство

$$B_{d-1}^G(u_1) \neq B_{d-1}^G(u_2).$$

Поэтому для некоторых  $i, j$  существует вершина  $w \in B_{d-1}^G(u_j) \setminus B_{d-1}^G(u_i)$ . Следовательно,  $\rho_G(u_i, w) = d > \rho_G(u_j, w)$ , причём  $\rho_G(u_1, x) = \rho_G(u_2, x)$  для любой вершины  $x \in V(G) \setminus V(H)$  (см. рис. 7). Тем самым  $w \in V(H)$  и диаметральная цепь графа  $G$  с концами  $u_i, w$  принадлежит подграфу  $H$ . Поскольку  $H$  — изометричный подграф, получаем  $d(H) = d$ . Следовательно,  $v$  не является диаметральной вершиной графа  $H$ .

Далее,  $H \setminus v$  — компонента связности графа  $G \setminus v$ , поэтому вершина  $v$  не является точкой сочленения графа  $H$ . Кроме того, используя определение точки сочленения, нетрудно понять, что всякая точка сочленения графа  $H$  является точкой сочленения графа  $G$ . С учётом леммы 1 заключаем, что  $H$  — блок.

В силу неравенства треугольника получаем

$$\rho_G(w, v) \geq \rho_G(w, u_i) - \rho_G(u_i, v) = d - 1,$$

поэтому  $\rho_G(v, x) = 1$  для любой вершины  $x \in V(G) \setminus V(H)$ , иначе имеем  $\rho_G(w, x) > d$ . Теперь предположим, что существуют различные вершины  $x_1, x_2 \in V(G) \setminus V(H)$ . Тогда  $V(G) \setminus V(H) \subseteq B_2^G(x_1) = B_2^G(x_2)$ ; противоречие. Значит, в множестве  $V(G) \setminus V(H)$  имеется единственная вершина. Таким образом,  $G = H \uparrow v$  и выполняется утверждение (3). Теорема 1 доказана.

Теорема 1 описывает расположение всех блоков в графах полного разнообразия шаров. В таком графе  $G$  имеется единственный нетривиальный блок в случае утверждения (1), два блока, а именно  $K_2$  и блок диаметра  $d(G)$ , в случае утверждения (3), и в случае (2) — не менее двух блоков, каждый из которых имеет вид  $v + H$ , где  $H$  — некоторый не содержащий воланов связный граф и  $v$  — единственная точка сочленения графа  $G$ .

Заметим, что если графы  $H_1$  и  $H_2$  не содержат воланов, то граф  $H_1 \otimes H_2$  также не содержит воланов. Значит, в этом случае  $H_1 \otimes H_2$  является графом полного разнообразия шаров в силу утверждения 1. Следовательно, условие (2) в теореме 1 достаточно для того, чтобы граф  $G$  обладал полным разнообразием шаров. Однако условия (1) и (3) не являются достаточными, как показывают, например, графы из следующего примера.

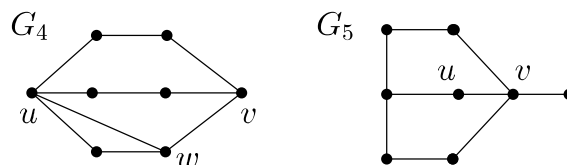


Рис. 8. Графы \$G\_4\$ и \$G\_5\$

**Пример 5.** Для графов \$G\_4\$ и \$G\_5\$ диаметра 3 (рис. 8) имеем

$$B_2^{G_4}(u) = B_2^{G_4}(v) = B_2^{G_4}(w), \quad B_2^{G_5}(u) = B_2^{G_5}(v),$$

$$\tau(G_4) = (8, 8, 6, 1), \quad \tau(G_5) = (8, 8, 7, 1).$$

Поэтому графы \$G\_4\$ и \$G\_5\$ не обладают полным разнообразием шаров, при этом \$G\_4\$ — блок и \$G\_5 = H \uparrow v\$, где \$H\$ — блок диаметра 3 и \$v\$ — не диаметральная вершина графа \$H\$.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

**Следствие 2.** Пусть \$G\$ — граф полного разнообразия шаров диаметра \$d(G) \ge 3\$. Тогда \$G\$ содержит изометричный блок диаметра \$d(G)\$.

Отметим, что \$n\$-вершинный граф диаметра \$d\$ с полным разнообразием шаров существует не всегда. Так, при \$d \ge 3\$ и \$n < 2d\$ таких графов не существует [5]. В [8] установлены все возможные значения параметров \$n\$, \$d\$ и \$t\$, при которых существует \$n\$-вершинный граф диаметра \$d\$ с локальным \$t\$-разнообразием (полным разнообразием) шаров, и явно построены соответствующие графы \$H\_{n,d,t}\$. Полученные в настоящей работе свойства графов полного разнообразия шаров также позволяют найти все такие возможные значения \$n\$ и \$d\$ для этих графов.

**Теорема 2.** В классе \$n\$-вершинных графов диаметра \$d\$ существует граф с полным разнообразием шаров тогда и только тогда, когда

$$n \ge 2d > 0 \quad \text{или} \quad n = d + 1 = 3.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть \$n\$-вершинный граф \$G\$ диаметра \$d\$ обладает полным разнообразием шаров. В силу определения 2 имеем \$d \ge 1\$. Граф \$G\$ содержит диаметральную цепь, поэтому \$n \ge d + 1\$. Если \$d = 1\$, то \$n \ge 2d > 0\$. Если \$d = 2\$, то \$n = d + 1 = 3\$ или \$n \ge 4 = 2d > 0\$. Пусть теперь \$d \ge 3\$. По следствию 2 граф \$G\$ содержит некоторый блок \$B\$ диаметра \$d\$. В блоке с не менее чем тремя вершинами любые две вершины принадлежат некоторому простому циклу (см., например, [15]). Следовательно, диаметральные вершины блока \$B\$ принадлежат некоторому простому циклу, значит, \$n \ge 2d > 0\$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно обратиться к графам полного разнообразия шаров  $H_{n,d,d-1}$  при  $n \geq 2d > 0$  [8] и  $K_{1,2}$  при  $n = d + 1 = 3$ . Теорема 2 доказана.

### 3. Графы древовидной структуры

В следствии 1 описаны деревья с полным разнообразием шаров. Деревья (связные ациклические графы) допускают естественное расширение до класса унициклических графов или в более общем случае до класса *кактусов* (cactus graphs [16]) — связных графов, в которых нет рёбер, принадлежащих более чем одному простому циклу (кактусные графы также называют *деревьями Хусими* [17]). Заметим, что нетривиальные деревья — это в точности все связные графы, у которых блоки изоморфны полному графу  $K_2$ . Нетривиальные кактусы также можно описать в терминах блоков, содержащихся в графе: это связные графы, у которых каждый блок является циклом или графом  $K_2$  [16]. Другой надкласс деревьев, естественно возникающий при таком подходе, — это *блоковые графы* (block graphs [14, 21]). Граф называется *блоковым*, если все его блоки являются полными графами. Блоковый граф также называют *графом блоков* в связи с тем, что графы, построенные по их блокам (см., например, [15]), образуют класс всех блоковых графов.

Кактусные и блоковые графы расширяют класс деревьев, но при этом сохраняют древовидную структуру графа. Объединение этих классов содержится в классе так называемых блоково-кактусных графов (block-cactus graphs [13, 20]), часто используемых в коммуникационных сетях и возникающих в биологии, химии, социальных науках и т. п. (см., например, [18, 19, 22]).

**Определение 4.** Граф, каждый блок которого есть цикл или полный граф, называется *блоково-кактусным* графом.

В следующей теореме на основе результатов из разд. 2 описываются блоково-кактусные графы с полным разнообразием шаров (ранее описание кактусов с полным разнообразием шаров было анонсировано в [2]).

**Теорема 3.** *Цикл, звезда и нетривиальный полный граф — с точностью до изоморфизма все блоково-кактусные графы с полным разнообразием шаров.*

**Доказательство.** Пусть блоково-кактусный граф  $G$  обладает полным разнообразием шаров. Тогда для  $G$  выполняется одно из утверждений в теореме 1. Если  $G$  является нетривиальным блоком, т. е. выполняется утверждение (1), то  $G$  есть цикл или полный граф  $K_n$  при  $n \geq 2$ .

Пусть выполняется утверждение (2). Тогда  $G = H_1 \otimes H_2$  (см. рис. 5). Предположим, что граф  $H_i$  имеет некоторое ребро  $u_1 u_2$ . Тогда его концы и точка сочленения  $v$  (рис. 5) образуют треугольник в  $G$ . Всякое ребро графа входит в один из его блоков. Кроме того, простая цепь, соединяющая различные вершины из одного блока, содержится в нём. В силу этих свойств блоков (см., например, [4]) в  $G$  есть блок  $B$ , содержащий треугольник с вершинами  $u_1, u_2, v$ . Поскольку  $G$  — блочно-кактусный граф, блок  $B$  есть полный граф. Нетрудно понять, что граф  $H_i$  имеет волан на вершинах  $u_1, u_2$ . Пришли к противоречию с утверждением (2). Следовательно, в  $H_1$  и  $H_2$  нет рёбер. Таким образом, заключаем, что граф  $G$  есть звезда  $K_{1,n}$ ,  $n \geq 2$ .

Предположим, что выполняется утверждение (3). Тогда  $G = H \uparrow v$ , где граф  $H$  есть блок и  $v$  — его не диаметральная вершина. Поскольку граф  $G$  блочно-кактусный,  $H$  есть цикл или полный граф. Следовательно, любая вершина графа  $H$  является диаметальной; противоречие.

Таким образом,  $G$  — цикл, звезда или нетривиальный полный граф. Полное разнообразие шаров в этих графах отмечено в примере 3. Теорема 3 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А. А. Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
2. Евдокимов А. А., Куценогая Е. П., Федоряева Т. И. О графах полного разнообразия шаров // Прикл. дискрет. математика. Прил. 2016. № 9. С. 110–112.
3. Евдокимов А. А., Федоряева Т. И. О проблеме характеристики векторов разнообразия шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 1. С. 44–52.
4. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М: Наука, 1990. 384 с.
5. Рычков К. Л. О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 99–108.
6. Федоряева Т. И. Операции и изометрические вложения графов, связанные со свойством продолжения метрики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 49–67.
7. Федоряева Т. И. Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 74–84.

8. **Федоряева Т. И.** Векторы разнообразия шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2007. Т. 14, № 2. С. 47–67.
9. **Федоряева Т. И.** Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 74–92.
10. **Федоряева Т. И.** О графах с заданными диаметром, числом вершин и локальным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 1. С. 65–74.
11. **Федоряева Т. И.** Мажоранты и миноранты класса графов с фиксированными диаметром и числом вершин // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 1. С. 58–76.
12. **Федоряева Т. И.** Строение вектора разнообразия шаров типичного графа заданного диаметра // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 375–387.
13. **Guo J., Volkmann L.** A generalization of Menger's theorem for certain block-cactus graphs // Graphs Comb. 1995. V. 11, No. 1. P. 49–52.
14. **Harary F.** A characterization of block-graphs // Can. Math. Bull. 1963. V. 6, No. 1. P. 1–6.
15. **Harary F.** Graph theory. Reading, MA: Addison-Wesley, 1969. 273 p.
16. **Harary F., Palmer E.** Graphical enumeration. New York: Acad. Press, 1973. 263 p.
17. **Harary F., Uhlenbeck G. E.** On the number of Husimi trees // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39, No. 4. P. 315–322.
18. **Lan J. K., Chang G. J.** Algorithmic aspects of the  $k$ -domination problem in graphs // Discrete Appl. Math. 2013. V. 161, No. 10–11. P. 1513–1520.
19. **Paten B., Diekhans M., Earl D., John J. St., Ma J., Suh B., Hausler D.,** Cactus graphs for genome comparisons // Proc. 14th Annu. Int. Conf. RECOMB2010 (Lisbon, Portugal. Apr. 25–28, 2010). Heidelberg: Springer, 2010. P. 410–425. (Lect. Notes Bioinform.; Vol. 6044).
20. **Randerath B., Volkmann L.** A characterization of well covered block-cactus graphs // Australas. J. Comb. 1994. V. 9. P. 307–314.
21. **Topp J., Volkmann L.** Well covered and well dominated block graphs and unicyclic graphs // Math. Pannonica. 1990. V. 1, No. 2. P. 55–66.
22. **Zmazek B., Zerovnik J.** Estimating the traffic on weighted cactus networks in linear time // Proc. 9th Int. Conf. Information Visualization. (London, England. July 6–8, 2005). Los Alamitos: IEEE Comput. Soc., 2005. P. 536–541.

Евдокимов Александр Андреевич,  
Федоряева Татьяна Ивановна

Статья поступила  
27 июня 2017 г.

Исправленный вариант —  
8 августа 2017 г.

TREE-LIKE STRUCTURE GRAPHS  
WITH FULL DIVERSITY OF BALLSA. A. Evdokimov<sup>1,2,a</sup> and T. I. Fedoryaeva<sup>1,2,b</sup><sup>1</sup>Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Acad. Koptuyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia<sup>2</sup>Novosibirsk State University,  
2 Pirogov St., 630090 Novosibirsk, Russia*E-mail:* <sup>a</sup>evdok@math.nsc.ru, <sup>b</sup>fti@math.nsc.ru

**Abstract.** Under study is the diversity of metric balls in connected finite ordinary graphs considered as a metric space with the usual shortest-path metric. We investigate the structure of graphs in which all balls of fixed radius  $i$  are distinct for each  $i$  less than the diameter of the graph. Let us refer to such graphs as *graphs with full diversity of balls*. For these graphs, we establish some properties connected with the existence of bottlenecks and find out the configuration of blocks in the graph. Using the obtained properties, we describe the tree-like structure graphs with full diversity of balls. Illustr. 8, bibliogr. 22

**Keywords:** graph, tree-like structure graphs, metric ball, radius of a ball, number of balls, diversity vector of balls, full diversity of balls.

## REFERENCES

1. **A. A. Evdokimov**, Locally isometric embeddings of graphs and the metric prolongation property, *Sib. Zh. Issled. Oper.*, **1**, No. 1, 5–12, 1994 [Russian]. Translated in *Discrete Analysis and Operations Research*, pp. 7–14, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996 (Math. Its Appl., Vol. 355).
2. **A. A. Evdokimov**, **E. P. Kutsenogaya**, and **T. I. Fedoryaeva**, On the full diversity of balls for graphs, *Prikl. Discretn. Mat., Prilozh.*, No. 9, 110–112, 2016 [Russian].
3. **A. A. Evdokimov** and **T. I. Fedoryaeva**, On the problem of characterizing the diversity vectors of balls, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 1, 44–52, 2014 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **8**, No. 2, 190–195, 2014.
4. **V. A. Emelichev**, **O. I. Melnikov**, **V. I. Sarvanov**, and **R. I. Tyshkevich**, *Lektsii po teorii grafov*, Nauka, Moscow, 1990 [Russian]. Translated under the title *Lectures on Graph Theory*, B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.

5. **K. L. Rychkov**, Sufficient conditions for the existence of a graph with a given variety of balls, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, **13**, No. 1, 99–108, 2006 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **1**, No. 3, 380–385, 2007.
6. **T. I. Fedoryaeva**, Operations and isometric embeddings of graphs related to the metric prolongation property, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **2**, No. 3, 49–67, 1995 [Russian]. Translated in *Operations Research and Discrete Analysis*, pp. 31–49, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997 (Math. Its Appl., Vol. 391).
7. **T. I. Fedoryaeva**, Variety of balls in the metric spaces of trees, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, **12**, No. 3, 74–84, 2005 [Russian].
8. **T. I. Fedoryaeva**, Diversity vectors of balls in graphs and estimates of the components of the vectors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **14**, No. 2, 47–67, 2007 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **2**, No. 3, 341–356, 2008.
9. **T. I. Fedoryaeva**, Exact upper estimates of the number of different balls of given radius for graphs with fixed number of vertices and diameter, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **16**, No. 6, 74–92, 2009 [Russian].
10. **T. I. Fedoryaeva**, On the graphs with given diameter, number of vertices, and local diversity of balls, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **17**, No. 1, 65–74, 2010 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **5**, No. 1, 44–50, 2011.
11. **T. I. Fedoryaeva**, Majorants and minorants for the classes of graphs with fixed diameter and number of vertices, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **20**, No. 1, 58–76, 2013 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **7**, No. 2, 153–165, 2013.
12. **T. I. Fedoryaeva**, Structure of the diversity vector of balls of a typical graph with given diameter, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **13**, 375–387, 2016 [Russian].
13. **J. Guo** and **L. Volkmann**, A generalization of Menger’s theorem for certain block-cactus graphs, *Graphs Comb.*, **11**, No. 1, 49–52, 1995.
14. **F. Harary**, A characterization of block-graphs, *Can. Math. Bull.*, **6**, No. 1, 1–6, 1963.
15. **F. Harary**, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
16. **F. Harary** and **E. M. Palmer**, *Graphical Enumeration*, Acad. Press, New York, 1973.
17. **F. Harary** and **G. E. Uhlenbeck**, On the number of Husimi trees, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39**, No. 4, 315–322, 1953.
18. **J. K. Lan** and **G. J. Chang**, Algorithmic aspects of the  $k$ -domination problem in graphs, *Discrete Appl. Math.*, **161**, No. 10–11, 1513–1520, 2013.
19. **B. Paten**, **M. Diekhans**, **D. Earl**, **J. St. John**, **J. Ma**, **B. Suh**, and **D. Haussler**, Cactus graphs for genome comparisons, in *Research in Computational Molecular Biology* (Proc. 14th Annu. Int. Conf., RECOMB2010, Lisbon, Portugal, Apr. 25–28, 2010), pp. 410–425, Springer, Heidelberg, 2010 (Lect. Notes Bioinform., Vol. 6044).
20. **B. Randerath** and **L. Volkmann**, A characterization of well covered block-cactus graphs, *Australas. J. Comb.*, **9**, 307–314, 1994.



21. **J. Topp** and **L. Volkmann**, Well covered and well dominated block graphs and unicyclic graphs, *Math. Pannonica*, **1**, No. 2, 55–66, 1990.
22. **B. Zmazek** and **J. Zerovnik**, Estimating the traffic on weighted cactus networks in linear time, *Information Visualization* (9th Int. Conf. Inf. Vis., London, England, July 6–8, 2005), pp. 536–541, IEEE Comput. Soc., Los Alamitos, 2005.

*Alexander A. Evdokimov,*  
*Tatiana I. Fedoryaeva*

Received  
27 June 2017  
Revised  
8 August 2017