О СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСКАХ ЦЕПЕЙ КРАТНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЮ

М. А. Лисицына[1], *С. В. Августинович*[2]

[1] Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Тихорецкий пр., 3, 194064 Санкт-Петербург, Россия

[2] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: `lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com`, `avgust@math.nsc.ru`

Аннотация. Раскраска вершин графа G называется совершенной, если цветовой состав окружения каждой вершины однозначно определяется цветом этой вершины. В работе дана полная характеризация совершенных раскрасок лексикографического произведения бесконечной цепи на паросочетание. Табл. 0, ил. 1, библиогр. 18.

Ключевые слова: совершенная раскраска, лексикографическое произведение, бесконечная цепь, паросочетание.

Введение

Рассмотрим обыкновенный неориентированный граф $G = (V, E)$ с множествами вершин V и ребер E. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \dots, k\}$ будем называть *цветами*. Функция $\phi : V \to I$ называется *совершенной раскраской* с матрицей параметров $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{k}$, если она сюръективна, и для всех i и j для любой вершины цвета i количество ее соседей цвета j равно m_{ij}.

Пусть G и H – произвольные графы. Граф, множество вершин которого является декартовым произведением $V(H) \times V(G)$, и две вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны тогда и только тогда, когда $\{u_1, v_1\} \in E(H)$ или $u_1 = v_1$ и $\{u_2, v_2\} \in E(G)$, называется *лексикографическим произведением* графов H на G и обозначается $H \cdot G$. Таким образом, чтобы получить граф $H \cdot G$ нужно выполнить следующие действия: каждую вершину графа H заменить копией графа G (*блоком* G); после чего соединить ребрами пары вершин из соседних блоков. Для лексикографического произведения графов используется также термин *композиция графов*.

Бесконечной цепью C_∞ называется граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, две вершины u и v смежны, если $|u - v| = 1$. Лексикографическое произведение C_∞ на G назовём *G-кратной бесконечной цепью*.

Приведем для наглядности схемы локального строения графов G и $C_\infty \cdot G$ (см. рис. 1).

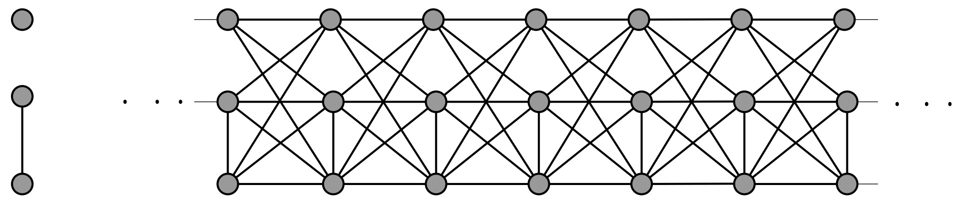

Рис. 1. Локальное строение графов G (слева) и $C_\infty \cdot G$ (справа)

Совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot G$ в цвета из множества $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ являются периодическими. Для описания такой раскраски достаточно указать ее наименьший период. Последнее означает, что совершенные раскраски бесконечных кратных цепей являются гомоморфным прообразом совершенных раскрасок соответствующих конечных графов.

Всюду далее через M_n обозначается граф паросочетания на $2n$ вершинах. В работе изучаются совершенные раскраски M_n-кратной цепи.

Ранее были описаны совершенные k-раскраски графов $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ и $C_\infty \cdot K_n$ для любого конечного k [12], где $\overline{K_n}$ и K_n – пустой и полный графы на n вершинах соответственно.

Рассматриваемые графы содержат бесконечную цепь в качестве подграфа. Близкими в этом смысле к ним являются граф призмы P_∞, бесконечные циркулянтные графы и транзитивные решетки.

Совершенные раскраски графа бесконечной призмы в произвольное конечное количество цветов перечислены в [2].

Первые результаты о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д. Б. Хорошиловой [7,8]. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций $\{1, 2, \ldots, n\}$ охарактеризованы в [4], а с набором $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ – в [14]. В [3] получены совершенные раскраски такого графа с дистанциями 1 и 2 в произвольное конечное число цветов.

В [6, 10] и [11] описаны совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки $G(Z^2)$ в 2, 3 и $k \leqslant 9$ цветов соответственно. В [5] и [16] доказано, что для любой совершенной раскраски бесконечной прямоугольной, треугольной и гексагональной решеток существует периодическая совершенная раскраска с той же матрицей параметров.

Совершенная раскраска называется *дистанционно-регулярной*, если ее матрицу параметров можно привести к трехдиагональному виду. Дистанционно-регулярные раскраски прямоугольной, треугольной и гексагональной решеток перечислены в [1, 18] и [9] соответственно.

1. Предварительные сведения

Для исследования совершенных раскрасок графа $C_\infty \cdot M_n$ будем использовать те же понятия и методы, что и для цепей $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ и $C_\infty \cdot K_n$ [12].

Опишем конструкцию, порождающую широкий класс совершенных раскрасок лексикографического произведения произвольных графов H на G. Рассмотрим совершенную раскраску графа H в k цветов

$$\psi : V(H) \to I$$

и множество $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_k\}$. Множество Φ_i — набор совершенных раскрасок графа G в цвета J_i с матрицей параметров M_i, причем $J_p \cap J_q = \varnothing$ для $p \neq q$. К каждому блоку G применим некоторую раскраску из предназначенного ему множества. Полученную структуру на графе $H \cdot G$ назовем *дизъюнктной раскраской* и обозначим $\psi \cdot \Phi(v_1, v_2)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Дизъюнктная раскраска графа $H \cdot G$ является совершенной.*

Доказательство. В дизъюнктной раскраске $\psi \cdot \Phi(v_1, v_2)$ рассмотрим две вершины – (u_1, u_2) и (w_1, w_2), такие что $\psi \cdot \Phi(u_1, u_2) = \psi \cdot \Phi(w_1, w_2)$.

По определению дизъюнктной раскраски заключаем: $\psi(u_1) = \psi(w_1)$. Из того, что вершины u_1 и w_1 в совершенной раскраске ψ графа H окрашены одинаково, следует совпадение цветового состава их окружения в этой раскраске. Значит, мультимножества цветов соседних для u_1 и w_1 копий графа G тоже совпадают. Цвета смежных вершин из G-копий, соответствующих самим u_1 и w_1, совпадают, т.к. раскраски этих копий являются совершенными с одной и той же матрицей параметров $M = M_{\psi(u_1)} = M_{\psi(w_1)}$. Таким образом, цветовой состав окружения вершин (u_1, u_2) и (w_1, w_2) совпадает, и, следовательно, раскраска $\psi \cdot \Phi(v_1, v_2)$ является совершенной.

Дизъюнктная конструкция для раскрасок впервые описана в [12]. В настоящей работе она сформулирована в более общем виде.

В статье изучаются совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot M_n$. Оказалось, что все они исчерпываются дизъюнктными совершенными раскрасками лексикографического произведения графа $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ на E. Основная трудность в доказательстве полученного результата – показать, что недизъюнктных совершенных раскрасок у графа нет.

Для исследования недизъюнктных совершенных раскрасок графа $C_\infty \cdot M_n$ будем применять технику объединения эквивалентных цветов, которая ранее использовалась для изучения совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки [5], а также для бесконечных цепей кратных графам $\overline{K_n}$ и K_n [12].

Напомним необходимые определения и идею этого метода. Пусть G – регулярный граф, и $\phi : V \to I$ – его совершенная раскраска. Цвета i и j в совершенной раскраске ϕ называются *эквивалентными* ($i \sim j$), если после их отождествления раскраска остается совершенной. В [12] доказано, что такое отношение на множестве I является отношением эквивалентности.

Операция отождествления цветов в классах эквивалентности фактормножества $I/\sim$ называется *склеиванием*. Раскраска, полученная после склеивания цветов совершенной раскраски ϕ, называется *редуцированной* раскраской и обозначается $\hat{\phi}$. Отметим, что $\hat{\phi}$ является совершенной раскраской. Кроме того, она может содержать эквивалентные цвета, т.е. к ней можно снова применить операцию склеивания.

Рассмотрим некоторую раскраску ϕ. *Расщеплением* ϕ назовем совершенную раскраску ψ, удовлетворяющую условию $\phi = \hat{\psi}$.

Реализация метода объединения эквивалентных цветов включает в себя два этапа. На первом этапе следует описать все редуцированные раскраски графа G, а на втором – получить все их допустимые расщепления.

2. Редуцированные раскраски M_n-кратной цепи

Нетрудно видеть, что лексикографическое произведение графов является ассоциативной операцией. Так как $M_n = \overline{K_n} \cdot E$, где E – граф, состоящий из одного ребра, то $C_\infty \cdot M_n = (C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$. Исследуемый граф, таким образом, может быть представлен двумя способами в виде лексикографического произведения двух множителей. Для представления $C_\infty \cdot M_n$ блоками являются паросочетания M_n, а для $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$ – ребра E.

Рёберномонохромной назовем совершенную раскраску графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$, если вершины каждого блока E в ней окрашены одинаково.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Редуцированные раскраски лексикографического произведения графов $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ на E являются рёберномонохромными.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый блок E графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$. Окружения концов такого ребра отличаются в точности на эти вершины. Следовательно, в совершенной раскраске ϕ они окрашены эквивалентными цветами. Значит, после применения операции склеивания к ϕ вершины такого блока E окажутся соцветными, из чего немедленно следует утверждение леммы.

Лемма 3 и теорема 1 описывают все рёберномонохромные раскраски исследуемого графа.

Лемма 3. *При $n \geqslant 2$ рёберномонохромные совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot M_n$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с совершенными раскрасками $\overline{K_n}$-кратной цепи.*

Доказательство. Так как граф $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ можно получить из графа $C_\infty \cdot M_n$ стягиванием ребер в паросочетаниях, то рёберномонохромной совершенной раскраске графа $C_\infty \cdot M_n$ соответствует совершенная раскраска $C_\infty \cdot \overline{K_n}$, в которой внутренняя степень каждого цвета меньше на 1.

Полное описание совершенных раскрасок $\overline{K_n}$-кратной цепи получено в [12]. Дадим необходимые определения, чтобы его здесь привести.

Полураскраска двудольного графа $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ – это раскраска вершин одной его доли. Совершенная раскраска $\overline{K_n}$-кратной цепи называется *двудольной*, если множества цветов его полураскрасок не пересекаются. В противном случае, множества цветов совпадают, и совершенная раскраска называется *недвудольной*.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *(Т. 1 в [12])*

Совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ исчерпываются следующим списком:

1. дизъюнктные совершенные раскраски;

2. недизъюнктные двудольные раскраски, полученные сопряжением произвольных 2-периодических полураскрасок;

3. недизъюнктные недвудольные раскраски, полученные сопряжением согласованных 2-периодических полураскрасок.

Редуцированные раскраски M_n-кратной цепи получаются из совершенных раскрасок графа $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ заменой каждой вершины на ребро с концами того же цвета.

Таким образом, для решения поставленной задачи остается охарактеризовать недизъюнктные расщепления рёберномонохромных раскрасок графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$.

3. Недизъюнктные совершенные раскраски графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$.

Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Недизъюнктные раскраски лексикографического произведения графа $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ на E при $n \geqslant 2$ не являются совершенными.*

Доказывать теорему 2 будем от противного. Пусть существуют недизъюнктные расщепления редуцированных раскрасок графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$, которые являются совершенными нерёберномонохромными раскрасками. Рассмотрим раскраску с таким свойством в минимальное количество цветов – ψ, назовем её *минимальной контрраскраской*.

Блок E, вершины которого окрашены цветами x и y, где x и y не обязательно различные, будем называть (xy)-ребром.

В лемме 4 приведено характеристическое свойство минимальной контрраскраски ψ.

Лемма 4. *Минимальная контрраскраска ψ содержит блоки-рёбра (aa) и (ab) для некоторого $b \neq a$ и не содержит блоков-рёбер (ac) и (bc) для $c \neq a$ и $c \neq b$.*

Доказательство. Недизъюнктность расщепления означает наличие в $\hat{\psi}$ двух монохромных (aa)-рёбер, раскраски которых в ψ не совпадают. Концы одного из этих рёбер окрашены в ψ разными цветами в силу её нерёберномонохромности. Без ограничения общности, считаем, что это раскраска (ab) $(a \neq b)$. Класс эквивалентности $[a]$ фактор-множества цветов совершенной раскраски ψ не содержит элементов, отличных от a и b. В противном случае, отождествим их с a и получим противоречие с минимальностью ψ. Таким образом, недизъюнктность нерёберномонохромного расщепления ψ означает одновременное присутствие в ней блоков-рёбер (aa) и (ab) (и/или (bb) и (ab)), а минимальность ψ влечёт отсутствие блоков-рёбер (ac) и (bc) для $c \neq a$ и $c \neq b$.

В леммах 5 – 8 доказаны свойства минимальной контрраскраски ψ.

Лемма 5. *Если блок E в минимальной контрраскраске не содержит вершин цвета a и b, то его концы соцветны.*

Доказательство. Предположим противное: пусть концы некоторого ребра в блоке-паросочетании окрашены цветами i и j, отличными от a и b и друг от друга.

Как уже отмечалось в лемме 2, цвета i и j эквивалентны. Отождествив их, получим контрраскраску, количество цветов в которой на 1 меньше, чем в исходной. Противоречие с минимальностью исходной контрраскраски. Значит, утверждение леммы верно.

Значение параметра m_{ii} будем называть *внутренней степенью цвета* i.

Лемма 6. *Для параметров минимальной контрраскраски верно равенство: $m_{ba} = m_{aa} + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим (ab)-ребро в минимальной контрраскраске ψ. Сравнивая цветовые составы окружений его концов, получим требуемое.

Лемма 7. *Если M_n-блок в минимальной контрраскраске содержит (aa)-ребро, то все его элементы являются (aa)-ребрами.*

Доказательство. Рассмотрим в такой раскраске M_n-блок с ребром (aa). Предположим, что в этом блоке есть вершина цвета c, отличного от a. Наличие в нем ребер типа (ac) приводит к противоречию в окружении вершин цвета a, а наличие ребер типа (bc) противоречит утверждению леммы 6.

Тогда согласно лемме 5 вершина цвета c принадлежит ребру (cc). Заметим, что $a \sim c$. При отождествлении цветов a и c получим контрраскраску в меньшее количество цветов. Противоречие.

Значит, рассматриваемый M_n-блок состоит сплошь из ребер типа (aa).

Аналогичное утверждение верно и для M_n-блоков с (bb)-ребром. Будем называть такие M_n-блоки блоками (aa) и (bb) *типов.*

Лемма 8. *Внутренняя степень цвета a в минимальной контрраскраске не меньше $2n$.*

Доказательство. У блока (aa) типа есть сосед-блок, содержащий вершину цвета b, т.к. в окружении a-окрашенной вершины должна быть вершина такого цвета. Значит, верно $m_{ba} \geqslant 2n$. В силу леммы 6 и условия $n \geqslant 2$ получаем: $m_{aa} \geqslant 3$.

Отсюда следует, что M_n-блок (aa) типа имеет соседом паросочетание с вершиной цвета a. Окрестность такой вершины содержит целый блок-паросочетание только с ребрами (aa), а значит, не менее $2n$ вершин цвета a. Что и требовалось доказать.

После того, как все необходимые вспомогательные утверждения сформулированы и доказаны, перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство. Итак, покажем, что в совершенной раскраске графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$ ребра (aa) и (ab) не могут одновременно быть элементами некоторых блоков-паросочетаний.

Рассмотрим M_n-блок, в котором есть ребро (ab). В силу леммы 8 такой блок либо окружен с двух сторон блоками-паросочетаниями, состоящими только из ребер (ab), либо имеет хотя бы одним соседом блок (aa) типа.

Первый вариант приводит нас к структуре на графе $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$, в которой ребрам всех паросочетаний соответствуе раскраска (ab). Такая структура является дизъюнктной совершенной раскраской.

Покажем, что второй вариант также противоречив. Для этого последовательно рассмотрим три случая: когда внутренняя степень цвета a равна $2n$, $2n+1$ и $2n+t$ для $2 \leqslant t \leqslant 2n$.

Случай $m_{aa} = 2n$. У блока (aa) типа не может быть такого же соседа. Иначе $m_{aa} \geqslant 2n+1$. Значит, у его соседей-блоков по n и $n-1$ ребер типа (ab). Ребро отличное от (ab) в последнем окрашено (cc) $(c \neq a, c \neq b)$ в силу леммы 5. В окрестности a-окрашенной вершины из блока типа (aa) содержится $2n-1$ вершина цвета b. Значит, вторым соседом блока с $(n-1)$-м ребром (ab) и одним ребом (cc) является блок (bb) типа. В окружении вершин цвета a из блока типа (aa) есть c-окрашенная вершина, а у вершин цвета a из блока с ребрами (ab) и (cc) — нет. Получили противоречие.

Случай $m_{aa} = 2n+1$. Теперь рассмотрим M_n-блок с ребром (ab). Один из его соседей-блоков будет типа (aa). В противном случае, получим $m_{aa} < 2n+1$. У этого блока-паросочетания типа (aa) оба соседа состоят из n ребер типа (ab). Иначе $m_{aa} \neq 2n+1$. Значит, окружение вершины цвета a из M_n-блока типа (aa) содержит ровно $2n$ b-окрашенных вершин. Следовательно, вторым соседом блока с (ab) ребрами является блок типа (bb). Тогда для вершины цвета a в таком блоке верно $m_{aa} = 2n$. Противоречие.

Случай $m_{aa} = 2n+t$ $(2 \leqslant t \leqslant 2n)$. Вновь рассмотрим блок-паросочетание с ребром (ab). Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что один его сосед – блок типа (aa), а второй сосед состоит из t ребер (ab) и $(n-t)$ ребер с вершинами отличных от a и b цветов. В свою очередь, у блока-паросочетания типа (aa) один из соседей того же типа, а второй содержит $(t-1)$ ребро (ab) и $(n-t+1)$ ребро с вершинами цветов отличных от a и b. Последнее замечание верно, в частности, для исходного M_n-блока с (ab)-ребром. Рассмотрим a-окрашенную вершину его соседа-блока с t ребрами (ab) типа. Для нее верно: $m_{aa} \leqslant 2n+t-1$. Противоречие.

Таким образом, доказано, что ребра (aa) и (ab) не могут быть одновременно элементами некоторых M_n-блоков в совершенной раскраске.

Значит, недизъюнктные раскраски графа $(C_\infty \cdot \overline{K_n}) \cdot E$ не являются совершенными.

Подведем итог выполненного исследования в следующей теореме.

Теорема 3. *Для* $n \geqslant 2$ *совершенные раскраски* M_n*-кратной цепи исчерпываются дизъюнктными раскрасками лексикографического произведения графов* $C_\infty \cdot \overline{K_n}$ *на* E.

Случай $n = 1$ для M_n-кратной цепи находится за рамками теоремы 3. Для $n = 1$ верно $C_\infty \cdot M_2 = C_\infty \cdot K_2$. Следовательно, он закрывается теоремой 4 (см. [12]), характеризующей совершенные раскраски K_n-кратной цепи.

Теорема 4. *(Т. 2 в [12])*
Совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot K_n$ исчерпываются следующим списком:
1. дизъюнктные совершенные раскраски;
2. недизъюнктные 3-периодические раскраски.

Таким образом, для цепи кратной паросочетанию M_n описаны все совершенные раскраски в конечное количество цветов.

Заключение

Многие задачи алгебраической комбинаторики можно решать с помощью компьютерных программ. Например, Д. С. Кротовым перечислены с помощью компьютера все совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки в k цветов для $k \leqslant 9$ [11]. В свою очередь, В. Д. Плаксина и П. А. Щербина создали программу для описания совершенных 4-раскрасок бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций [15]. Программа нашла контрпример к гипотезе О. Г. Паршиной о возможной характеризации совершенных раскрасок таких графов в произвольное конечное количество цветов [13].

Пусть G – бесконечный граф. Время работы алгоритмов, которые ищут среди его раскрасок в k цветов совершенные, стремительно растет с ростом k. Кроме того, даже для небольших k интересно не только перечислить все такие раскраски, но и получить их классификацию. Тем большую ценность приобретают результаты, которые характеризуют совершенные раскраски бесконечных графов в произвольное конечное число цветов [2,3,12]. В данной работе описаны все совершенные k-раскраски графа $C_\infty \cdot M_n$ для любых натуральных k и n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В.** Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 3–10.
2. **Лисицына М. А., Августинович С. В.** Совершенные раскраски призмы // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1116–1128.
3. **Лисицына М. А., Паршина О. Г.** Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 20–34.

4. **Паршина О. Г.** Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 76–83.
5. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2004. Т. 11, № 1. С. 79–92.
6. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(Z^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2005. Т. 12, № 1. С. 37–54.
7. **Хорошилова Д. Б.** О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 6. С. 82–89.
8. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92.
9. **Avgustinovich S. V., Krotov D. S., Vasil'eva A. Yu.** Completely regular codes in the infinite hexagonal grid // Sib. Electron. Math. Rep. 2016. Vol. 13, № 1. P. 987–1016.
10. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. Vol. 268, No. 1–3. P. 31—49.
11. **Krotov D. S.** Perfect colorings of Z^2: Nine colors // E-print 0901.0004, arXiv.org. 2009.
12. **Lisitsyna M. A., Avgustinovich S. V., Parshina O. G.** On perfect colorings of infinite multipath graphs // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. Vol. 17. P. 1863–1868.
13. **Parshina O. G.** Perfect k-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Algorithms and Automata (Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015). 2015. P. 80.
14. **Parshina O. G., Lisitsyna M. A.** The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. Vol. 17. P. 590—603.
15. **Plaksina V. D., Shcherbina P. A.** New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distanses // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. Vol. 18. P. 530–533.
16. **Puzynina S. A.** On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids // Sib Math. J. 2011. Т. 52, № 1. С. 91–104.
17. **Puzynina S. A., Avgustinovich S. V.** On periodicity of two-dimensional words // Theor. Comput. Sci. 2008. Vol. 391. P. 178–187.
18. **Vasil'eva A. Yu.** Distance regular colorings of the infinite triangular grid // Collection of Abstracts of the International Conference "Mal'tsev Meeting"(Novosibirsk, Russia, Nov. 10–13, 2014). 2014. P. 98.