

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УПАКОВОК В НЕВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ *)

П. Д. Лебедев^{1,2}, В. Н. Ушаков¹, А. А. Успенский^{1,2}

¹ Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
ул. С. Ковалевской, 16, 620108, Екатеринбург, Россия

² Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина,
ул. Мира, 19, 620002 Екатеринбург, Россия

E-mail: pleb@yandex.ru, ushak@imm.uran.ru, uspen@imm.uran.ru

Аннотация. Текст. Табл. 0, рис. 4, библиогр. 15.

Ключевые слова: упаковка, максимизация, супердифференциал, производная по направлению, аппроксимация.

Введение

При обработки множеств нетривиальной геометрии в теории управления и дифференциальных играх [1, 2], а также при решении широкого спектра практических задач, в частности, задач логистики [3], требуется выполнять аппроксимацию множеств наборами унифицированных элементов. Одним из подходов к решению проблемы аппроксимации плоского компактного множества является оптимальная упаковка кругов равного радиуса. В наиболее распространенной постановке задача о построении оптимальной упаковки сводится к нахождению набора из заданного числа конгруэнтных кругов, которые вложены в рассматриваемое множество и не пересекаются попарно по своим внутренним точкам. Критерием оптимальности выбрана максимизация радиуса кругов. Ранее авторы изучали данную проблему для выпуклых фигур [4, 5], но особенно сложной и в то же время актуальной, является задача упаковки для невыпуклых множеств, см. например, [6, 7]. В данной статье развиты методы и предложены численные алгоритмы, использующие выявленные свойства негладкой функции, равной максимальному радиусу круга, который может быть расположен с центром в заданной точке, не пересекаясь по внутренним точкам с другими кругами и не выходя за пределы заданной фигуры. В основе методов и численных процедур лежат конструкции субдифференциального исчисления в смысле выпуклого анализа [8, 9].

*) Исследование Лебедева П.Д. и Ушакова В.Н. поддержано грантом РФФИ, проект № 19-11-00105.

1. Постановка задачи

Пусть задано компактное односвязное множество $M \subset \mathbb{R}^2$, в общем случае невыпуклое. Будем рассматривать множества, состоящие из кругов $O(\mathbf{s}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| \leq r\}$, радиус которых $r > 0$.

Определение 1. Будем называть упаковкой U_n в множество M набор $O(\mathbf{s}_1, r), O(\mathbf{s}_2, r), \dots, O(\mathbf{s}_n, r)$ из $n \in \mathbb{N}$ кругов равного радиуса $r > 0$, такой что выполняются условия

$$\forall i = \overline{1, n} \quad O(\mathbf{s}_i, r) \subseteq M \quad (1)$$

и

$$\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n} \quad (i \neq j) \Rightarrow \text{int } O(\mathbf{s}_i, r) \cap \text{int } O(\mathbf{s}_j, r) = \emptyset, \quad (2)$$

где $\text{int}(\cdot)$ означает объединение внутренних точек множества.

Задача 1. Пусть задано компактное односвязное множество M и натуральное число n . Требуется найти упаковку U_n^* в M при максимально возможном радиусе r кругов.

В качестве дуальной задачи часто рассматривается задача о нахождении упаковки при максимально возможном числе элементов n , но при фиксированном $r > 0$.

Обозначим S_n набор центров кругов упаковки. Заметим, что если $n > 1$ и выполняется вложение $S_n \subset M$, то максимальный радиус кругов упаковки с центрами в точках из $S_n \subset M$ равен

$$R_M(S) = \min_{i=\overline{1, n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \quad (3)$$

где

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) \triangleq \min \left(0.5\rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)}), \rho(\mathbf{x}, \partial M) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$S_n^{(i)} \triangleq S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$, ∂M означает границу множества M , $\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{x} до замкнутого множества M . Функции $\varphi^{(i)}$ $i = \overline{1, n}$, можно считать характеристическими в задаче 1, поскольку они определяют максимально возможный радиус кругов с центрами в точках их текущего массива.

Задача 1 сводится к нахождению массива точек S , для которого минимально значение величины (3).

2. Методы решения задачи

В большинстве случаев решение задачи об оптимальной упаковке можно найти только численными методами. Одним из путей является пошаговое изменение координат некоторого начального массива $S^{(0)}$

центров элементов упаковки. При этом основным их элементом служит максимизация значения функций 4 в точках $\mathbf{s}_i, i = \overline{1, n}$.

Определение 2. [8, с. 37, 38] Супердифференциалом функции $u(\mathbf{x})$ с областью определения $X \subseteq \mathbb{R}^2$ в точке $\mathbf{x} \in \text{int } X$ называется выпуклое компактное множество $D^+u(\mathbf{x})$ в \mathbb{R}^2 , для которого выполняется равенство

$$D^+u(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle - d^+u(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \geq 0 \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^2 \},$$

где

$$d^+u(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \sup \{ \delta^{-1} [u(\mathbf{x} + \delta \mathbf{f}') - u(\mathbf{x})] : \delta \in (0, \varepsilon), \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\| \},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов.

Если для функции $u(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_0 определен супердифференциал, то это значит, что график функции в некотором смысле хорошо аппроксимируется минимумом по набору линейных функций. В частности, производная

$$\left. \frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{u(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{g}) - u(\mathbf{x}_0)}{\varepsilon}$$

функции $u(\mathbf{x})$ по направлению $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}, \mathbf{0}$ в точке \mathbf{x}_0 равна

$$\left. \frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \min \{ \langle \mathbf{g}, \mathbf{d} \rangle : \mathbf{d} \in D^+u(\mathbf{x}_0) \}. \quad (5)$$

Подробнее свойства супердифференциала описаны, например в [9].

Определение 3. Множеством значимых точек $\Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$ для функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$ в точке $\mathbf{x} \in M$ назовем

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) &= \{ \mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} : \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\| = 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \} \cup \\ &\cup \{ \mathbf{m} \in \partial M : \|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\| = \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \}. \end{aligned}$$

По сути значимые точки есть либо центры тех элементов упаковки, которые граничат с кругом $O(\mathbf{x}, \varphi^{(i)}(\mathbf{x}))$, либо точки границы фигуры M , которые лежат на окружности $O(\mathbf{x}, \varphi^{(i)}(\mathbf{x}))$.

В работах [4, 5] исследованы дифференциальные свойства функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ в тех точках $\mathbf{x} \in M$, для которых $\mathbf{x} \notin \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$. Из определения 3 следует, что в них и только в них $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ отлична от нуля. Показано, что в этом функция $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ в окрестностях этих точек локально вогнутая, ее супердифференциал

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \text{co} \left(\Phi(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \right), \quad (6)$$

где

$$\Phi(\mathbf{x}, S^{(i)}, M) \triangleq \left(\frac{\{\mathbf{x}\} - \left(S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \right)}{4\varphi^{(i)}(\mathbf{x})} \right) \cup \left(\frac{\{\mathbf{x}\} - \left(\partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \right)}{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})} \right), \quad (7)$$

где $\text{co}(M)$ — выпуклая оболочка множества M .

Лемма 1. Пусть задана точка $\mathbf{x}^* \in M$ при некотором фиксированном массиве $S_n^{(i)}$. Если

$$\mathbf{x}^* \notin \text{co} \Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M), \quad (8)$$

то в точке $\mathbf{x}^* \in M$ определен супердифференциал $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ и

$$\mathbf{0} \notin D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*), \quad (9)$$

где $\mathbf{0} \triangleq (0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим (8) для некоторой точки $\mathbf{x}^* \in M$ выполняется, а (9) нет. Тогда исходя из формулы (6) во множестве найдется конечное число k векторов $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^k \subseteq \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$, таких, что $\mathbf{0}$ представим как их выпуклая комбинация. Тогда можно записать равенство

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{f}_j, \quad (10)$$

в котором для коэффициентов $\alpha_j, j = \overline{1, k}$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$$

и неравенства

$$\forall j = \overline{1, k} \quad \alpha_j \geq 0.$$

По построению во множестве $\Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ для каждого вектора $\mathbf{f}_j \in \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ найдется такой вектор $\mathbf{g}_j \in \Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$, что

$$\mathbf{g}_j - \mathbf{x}^* = \beta_j \mathbf{f}_j,$$

где β_j может быть равно или $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ или $4\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$, но в любом случае является положительным числом. Поэтому с учетом (10) можно записать

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j (\mathbf{g}_j - \mathbf{x}^*)}{\beta_j} \quad (11)$$

Разделив обе части равенства на $\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\beta_j}$ получим,

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \lambda_j (\mathbf{g}_j - \mathbf{x}^*), \quad \lambda_j = \frac{\alpha_j}{\beta_j} / \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\beta_j}, \quad j = \overline{1, k},$$

где для коэффициентов $\lambda_j, j = \overline{1, k}$ справедливо

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

и

$$\forall j = \overline{1, k} \quad \lambda_j \geq 0.$$

Перенеся слагаемые с \mathbf{x} в левую часть равенства (11), запишем

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{g}_j.$$

Значит,

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{g}_j,$$

то есть точка \mathbf{x}^* может быть представлена как выпуклая комбинация элементов множества $\Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$. Получилось противоречие. Значит, выполняется (9).

Определение 4. Проекцией $\pi(\mathbf{a}, M)$ точки \mathbf{a} на выпуклое компактное множество M называется ближайшая к \mathbf{a} в евклидовой метрике точка из M .

Заметим, что если множество B не выпуклое, то ближайших к a точек может быть более одной, но в случае выпуклого множества она всегда единственна согласно теореме Моцкина (см. [10]).

Теорема 1. Если для точки $\mathbf{x}^* \in M$ выполняется условие (8), то среди всех векторов из окружности $\partial O(\mathbf{0}, 1)$ есть ровно один \mathbf{g}^* , такой, что

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \max \left\{ \left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} : \mathbf{g} \in \partial O(\mathbf{0}, 1) \right\} > 0. \quad (12)$$

При этом

$$\mathbf{g}^* = \frac{\pi(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))}{\|\pi(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))\|}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из (8) согласно лемме 1 следует

$$\pi(\mathbf{0}, D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)) \neq \mathbf{0}.$$

Значит,

$$\|\pi(\mathbf{0}, D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))\| > 0,$$

и правая часть выражения (13) определена.

Покажем, что производная по направлению \mathbf{g}^* равна

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \|\mathbf{d}^*\|, \quad (14)$$

где мы обозначили $\mathbf{d}^* = \pi(\mathbf{0}, D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))$. Действительно, с одной стороны в супердифференциале есть точка $\mathbf{d}^* \in D^+ u(\mathbf{x}^*)$, поэтому исходя из формулы (5) и выражения (13), гарантирующего, что угол между векторами \mathbf{g}^* и \mathbf{d}^* равен нулю, можно записать

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \leq \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle = \|\mathbf{g}^*\| \cdot \|\mathbf{d}^*\| \cos 0 = \|\mathbf{d}^*\|. \quad (15)$$

С другой стороны покажем, что в супердифференциале не может точки \mathbf{d}_0 , такой, что

$$\langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}_0 \rangle < \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle.$$

Рассмотрим прямую Λ , проходящую через точки $\mathbf{0}$ и \mathbf{d}^* , а значит параллельно вектору \mathbf{g}^* . Из неравенства (17) следует, что ортогональная проекция $\bar{\mathbf{d}}_0$ на прямую Λ лежит от точки \mathbf{d}^* с той же стороны, что и начало координат. Поэтому для угла между векторами $\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}^*$ и $-\mathbf{d}^*$ справедлива оценка

$$\angle(\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}^*, -\mathbf{d}^*) < \frac{\pi}{2}.$$

Значит на отрезке $[\mathbf{d}_0, \mathbf{d}^*]$ можно найти в достаточно малой окрестности точки \mathbf{d}^* точку $\hat{\mathbf{d}}_0$, которая лежит ближе к началу координат, чем \mathbf{d}^* . в то же время супердифференциал функции — выпуклое множество (см. [9]). Следовательно выполняется включение

$$\hat{\mathbf{d}}_0 \in [\mathbf{d}_0, \mathbf{d}^*] \subset D^+ u(\mathbf{x}^*).$$

Значит, точка \mathbf{d}^* не является в множестве $D^+ u(\mathbf{x}^*)$ ближайшей к началу координат. Это противоречит определению проекции 4. Полученное противоречие доказывает истинность неравенства

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \geq \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle. \quad (16)$$

Из неравенств (15) и (16) вытекает равенство (14).

Покажем, что для любого вектора $\mathbf{g} \in \partial O(\mathbf{0}, 1)$ при $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}^*$ имеет место

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} < \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle. \quad (17)$$

Обозначим $\alpha = \angle(\mathbf{g}^*, \mathbf{g})$ угол между векторами \mathbf{g} и \mathbf{g}^* , по условию $\alpha \in (0, \pi]$. Из формулы (5) вытекает оценка

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \langle \mathbf{g}, \mathbf{d}^* \rangle = \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{d}^*\| \cos \alpha = \|\mathbf{d}^*\| \cos \alpha < 1,$$

которая совпадает с (17).

Из равенства (14) и неравенства (17) (которое выполняется для всех векторов \mathbf{g} при $\|\mathbf{g}\| = 1$ и $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}^*$) следует формула (12).

Замечание 1. Супердифференциал $D^+\varphi(\mathbf{x}^*)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$, определенного по формуле (7). Поэтому ближайший к началу координат вектор в нем $\mathbf{d}^* \in D^+\varphi(\mathbf{x}^*)$ найти относительно легко. Это либо один из векторов $\mathbf{f}^* \in \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$, либо ортогональная проекция точки $\mathbf{0}$ на отрезок $[\bar{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}}]$, где $\bar{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}} \in \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$.

3. Численная реализация алгоритмов

Для поэтапного увеличения величины $R_M(S_n)$ авторами реализован алгоритм, который имитирует отталкивание точки \mathbf{s}_i от ближайших к ней элементов из $S_n^{(i)}$ и от границы ∂M невыпуклого компакта M . Он опирается на теорему 1 и реализует процедуру итеративного приближения центра элемента упаковки \mathbf{s}_i к точке локального максимума характеристической функции $\varphi^{(i)}(\cdot)$. Алгоритм следует отнести к схемам численной оптимизации на базе супер- и субградиентных методов, аналогичных тем, которые использовались в [11]. Похожие алгоритмы рассмотрены, например, в [13, 14].

Пусть на шаге работы алгоритма с номером k массив центров элементов упаковки равен S_n . Поскольку каждая из функций $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$ супердифференцируема на множестве M (кроме точек ∂M и $S_n^{(i)}$), то для вычисления координат точки в новом массиве центров можно использовать метод суперградиентного подъема, аналогичный методу субградиентного спуска. Для этого сначала во каждой точках $\mathbf{s}_i \in S_n$ вычисляется супердифференциал $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ по формуле (6). Затем строится массив

$\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^n$ векторов, ориентированных по направлению максимального роста $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$ по формуле

$$\mathbf{g}_i = \begin{cases} \frac{\pi(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i))}{\|\pi(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i))\|}, & \mathbf{0} \in D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \\ \mathbf{0}, & \mathbf{0} \notin D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Затем строится массив $\hat{S}_n = \{\hat{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$ новых значений центров элементов упаковки по формуле

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} \mathbf{s}_i + \gamma_k \mathbf{g}_i, & (\mathbf{s}_i + \gamma_k \mathbf{g}_i) \in M, \\ \mathbf{s}_i, & (\mathbf{s}_i + \gamma_k \mathbf{g}_i) \notin M, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Заметим, что в формуле (18) все получаемые вектора имеют норму 0, если текущий центр упаковки принадлежит выпуклой оболочке его значимых точек, а значит производные функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ в \mathbf{s}_i по всем направлениям не положительны. В противном случае вектора \mathbf{g}_i имеют норму, равную 1. А длина вектора, равного сдвигу от \mathbf{s}_i к $\hat{\mathbf{s}}_i$, пропорциональна коэффициенту γ_k . Для обеспечения сходимости алгоритма к некоторому локально оптимальному массиву S_n^* на последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ налагаются условия

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \gamma_k > \gamma_{k+1} > 0, \quad (20)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = +\infty. \quad (22)$$

Неравенства (20) гарантируют, что изменения координат точки происходят в направлении роста функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$, а не в противоположном направлении. Предел (21) означает, что величина нормы сдвига уменьшается до нуля. Равенство (22) говорит о том, что за достаточно большое число шагов алгоритма массив центров упаковки может занять любое положение на фигуре M , независимо от ее размеров, подробнее см. [12]. В качестве наиболее удобной формулы для генерации коэффициентов γ_k в формуле (19) можно предложить дробную функцию от номера k :

$$\gamma_k = \frac{a}{k+b}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

где коэффициенты $a \in (0, +\infty)$ и $b \in [0, +\infty)$ задаются пользователем при запуске программного комплекса.

Заметим, что выражения в формуле (18) не определены в случае, если какая-то из точек $\mathbf{s}_i \in S_n$ лежит на границе фигуры M или две точки

$s_i \in S_n$ и $s_j \in S_n$ совпадают при $i \neq j$. Однако при практической реализации алгоритмов данная ситуация крайне маловероятна, поскольку множество M имеет ненулевую меру на плоскости, а его граница ∂M и S_n имеют меру, равную нулю.

Отдельной важной процедурой, входящей в программный комплекс, является построение начальной итерации \tilde{S}_n центров элементов упаковки. Она выполняется стохастическими методами, но с учетом особенностей рассматриваемой схемы суперградиентного подъема. В частности, накладываются условия на минимальное расстояние между точками и на то, чтобы точки были максимально равномерно распределены по всей площади фигуры M . Здесь отметим, что процедуры численного решения выпукло-вогнутых оптимизационных задач, сочленяющие суб- и суперградиентные методы с элементами стохастичности в вычислительных операциях, развиваются, например, в работе [15].

4. Примеры построения упаковок

С помощью разработанного в среде MATLAB программного комплекса [16] выполнено моделирование решений ряда задач о построении оптимальных упаковок для различных фигур M , имеющих невыпуклую геометрию. Главное его отличие от комплексов, использовавшихся ранее для выпуклых множеств состоит в том, что в нем более сложная процедура отыскания ближайших к каждому из центров упаковки точек границы ∂M . Процедура выделяет так называемые множества симметрии в M (подробнее о них см. [18, 19]), точки которых являются геометрическим местом центров кругов, вложенных в M , при этом пересекающихся с ∂M в двух или более точках. Косвенным показателем оптимальности упаковки является ее плотность $\sigma(U_n)$, то есть отношение суммы объемов площадей кругов $O(s_i, r) \subseteq U_n$ к площади фигуры M . компакта M . В работе [17] приведены оценки для максимально возможной плотности упаковки, но лишь для выпуклых фигур. В процессе решения задач был использован алгоритм, основанный на формулах (18), (19). Коэффициенты γ_k вычисляются в соответствии с выражением 23.

Пример 1. Пусть задано невыпуклое компактное множество M , ограниченное кривой

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4, \quad (24)$$

при значениях параметров $a = 1.1, c = 1$. Требуется решить задачу 1 при $n = 14$ и $n = 16$.

Кривая (24) является частным случаем овала Кассини. При $c < a <$

$\sqrt{2}c$ она ограничивает невыпуклое односвязное множество, симметричное относительно начала координат (см. [20]). Решение задачи было осуществлено путем многократного запуска программного комплекса.

Полученный массив центров при $n = 14$

$$S_{14} = \{(1.1837, -0.228), (0.2294, -0.2616), (0.8014, 0.3867), \\ (0.5865, 0.0065), (0.2359, 0.2679), (1.1995, 0.2079), (-0.7560, -0.0419), \\ (-0.4377, 0.3212), (-1.2385, 0.137), (0.7771, -0.3865), (-1.1209, -0.286), \\ (-0.8736, 0.3811), (-0.4116, -0.3141), (-0.1223, 0.0157)\}.$$

Радиус кругов найденной оптимальной упаковки $r \approx 0.2181$. Плотность упаковки (отношение суммы площадей кругов к площади фигуры) равна $\sigma \approx 0.6910$. Множество M , круги упаковки U_{14} и массив их центров представлены на рис. 1.

Полученный массив центров при $n = 16$

$$S_{16} = \{(-0.586, 0.368), (0.6769, 0.0126), (1.1816, -0.2414), (1.2275, 0.178), \\ (0.3807, -0.2874), (-0.5876, -0.3695), (0.3771, 0.3122), (-0.3804, -0.0021), \\ (-1.0674, -0.3319), (-1.275, 0.0332), (0.7885, -0.3941), (-1.0092, 0.3584), \\ (-0.041, 0.2481), (0.8633, 0.3909), (-0.8012, -0.0067), (-0.0389, -0.2485)\}.$$

Радиус кругов найденной оптимальной упаковки $r \approx 0.21$. Плотность упаковки (отношение суммы площадей кругов к площади фигуры) равна $\sigma \approx 0.732$. Множество M , круги упаковки U_{16} и массив их центров представлены на рис. 2.

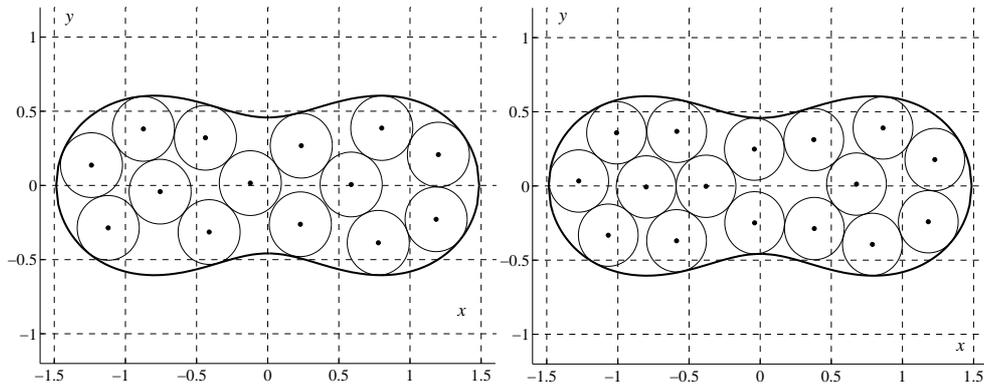


Рис. 1. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{14} в примере 1

Рис. 2. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{16} в примере 1

Пример 2. Пусть задано невыпуклое множество M , ограниченное кривой

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + h \cos(t - mt), \\ y = (R - mR) \sin mt - h \sin(t - mt), \end{cases} \quad (25)$$

с параметрами $t \in [0, 8\pi]$, $R = 1$, $m = 1/4$, $h = 1/5$. Требуется решить задачу 1 при $n = 13$ и $n = 15$.

Кривая (25) есть гипотрохоида, она является траекторией точки, расположенной на круге радиуса mR на расстоянии h от его центра, катящемся без скольжения с внутренней стороны окружности радиуса R (см. [20]). Она, как и в предыдущем примере, ограничивает невыпуклое односвязное множество, симметричное относительно начала координат.

Полученный массив центров при $n = 13$

$$\begin{aligned} S_{13} = \{ & (0.6486, 0), (0.3515, -0.0057), (-0.6501, 0), (-0.1416, -0.3651), \\ & (-0.1235, 0.0917), (0.2858, 0.2831), (-0.4085, 0.1708), (0, 0.6529), \\ & (0, -0.6484), (0.1721, -0.4059), (0.001, 0.3592), \\ & (0.0794, -0.124), (-0.3675, -0.1431)\}. \end{aligned}$$

Радиус кругов найденной оптимальной упаковки $r \approx 0.1465$. Плотность упаковки U_{15} равна $\sigma \approx 0.6307$. Множество M , круги упаковки U_{13} и массив их центров представлены на рис. 3.

Полученный массив центров при $n = 15$

$$\begin{aligned} S_{15} = \{ & (-0.1663, -0.4153), (-0.1439, -0.1225), (-0.4199, -0.1716), \\ & (0.2616, 0.1151), (0, -0.6580), (0.1366, -0.1366), (-0.5365, 0.0829), \\ & (0.4156, -0.1740), (-0.3208, 0.2604), (0.1988, 0.3881), (0, 0.6678), \\ & (-0.08, 0.4011), (0.1648, -0.4223), (-0.0188, 0.1284), (0.5406, 0.0786)\}. \end{aligned}$$

Радиус кругов найденной оптимальной упаковки $r \approx 0.139$. Плотность упаковки U_{15} равна $\sigma \approx 0.6552$. Множество M , круги упаковки U_{15} и массив их центров представлены на рис. 4.

Для отыскания аппроксимации глобально оптимальной упаковки авторами предусмотрена возможность многократного использования алгоритма при различных начальных условиях, генерируемых с помощью стохастической процедуры. При моделировании каждого примера выполнено в $5 \div 10$ запусков программного комплекса. В каждом из них выполнялось $2000 \div 5000$ циклов алгоритма. Машинное время, потраченное на каждый запуск варьируется от 3 до 15 минут.

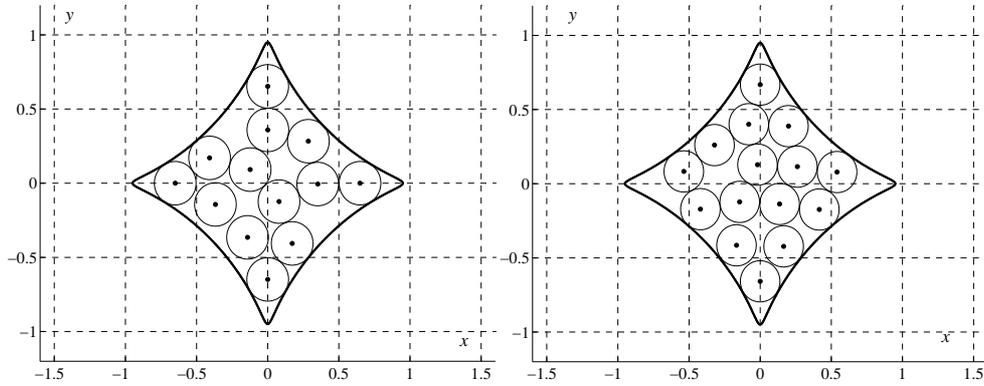


Рис. 3. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{13} в примере 2

Рис. 4. Аппроксимация оптимальной упаковки U_{15} в примере 2

5. Заключение

Разработаны и реализованы алгоритмы построения аппроксимаций оптимальных упаковок для невыпуклых фигур. Их теоретическую основу составила теорема 1, а практическая реализация выполнена на базе формул (18), (19) и (23). Полученные результаты позволяют утверждать, что плотность полученных программным комплексом упаковок сравнима с плотностью известных оптимальных упаковок базовых выпуклых фигур (см., например, [21]), хотя и несколько ниже (что обусловлено гораздо более сложной формой фигур). Аппроксимации множеств наборами кругов могут использоваться в задачах управления, например, для построения управления методом экстремального прицеливания и при численном построении множеств достижимости и интегральных воронок [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры, Наука, М., 1974, 456 с.
2. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Малев А. Г. Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Труды Ин-та математики и механики. 2011. Т. 17, № 2. С. 209–224.
3. Казаков А. Л., Лемперт А. А., Бухаров Д. С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автоматика и телемеханика. 2013. №6. 87–100.

4. **Ушаков В. Н., Лебедев П. Д., Лавров Н. Г.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсы // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 3. С. 67–79. DOI: 10.14529/mmp170306
5. **Лебедев П. Д., Казаков А. Л.** Итерационные методы построения упаковок из кругов различного радиуса на плоскости // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2 С. 141–151.
6. **Machchhar J., Elber G.** Dense packing of congruent circles in free-form non-convex containers// Computer Aided Geometric Design, Volumes 52–53, March–April 2017. P. 13–27. DOI: 10.1016/j.cagd.2017.03.006
7. **Meng L., Yao X., Wang Ch.** Non-convex shape effects on the dense random packing properties of assembled rods// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Volume 490. 2017. doi: 10.1016/j.physa.2017.08.026
8. **Субботин А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных технологий, 2003. 336 с.
9. **Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
10. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
11. **Лебедев П. Д., Ушаков А. В.** Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
12. **Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В.В.** Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 326 с.
13. **Нурминский Е. А., Тьен Д.** Метод сопряженных субградиентов с ограниченной памятью// Автомат. и телемех. 2014. №4. С. 67–80.
14. **Воронцова Е. А.** Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса// Вычислительные технологии. 2017. Т. 22. №2. С. 67–84.
15. **Гасников А. В., Двуреченский П. Е., Камзолов Д. И., Нестеров Ю. Е., Спокойный В. Г., Стецюк П. И., Суворикова А. Л., Чернов А. В.** Поиск равновесий в многостадийных транспортных моделях // Труды Московского физико-технического института. 2015. Том 7, №4, С. 143–155.
16. **Лебедев П. Д.** Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Свидетельство о государственной регистрации № 2015661543 от 29.10.2015.
17. **Тот Л. Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 365 с.
18. **Местецкий Л. М.** Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.
19. **Лебедев П. Д., Успенский А. А.** Конструирование негладкого решения задачи управления по быстрдействию при низком порядке гладкости

границы целевого множества // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, №1. С. 108–119. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119

- 20. Савелов А. А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: Либроком, 2010. 294 с.
- 21. Specht E.** Packomania <http://www.packomania.com>