

ПОЛНЫЙ ИНВАРИАНТ ГРАФА

С. В. Курапов¹, М. В. Давидовский²¹Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского 66, 69600, Запорожье, Украина²Запорожский институт последипломного педагогического образования
ул. Независимой Украины 57-А, 69035, Запорожье, Украина

E-mail: kurapovs@znu.edu.ua, m.davidovsky@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается задача определения полного инварианта графа, построенного на множестве рёберных разрезов графа. Рёберный разрез определяется ребром и инцидентными к нему центральными вершинами. Показано, что множество базовых рёберных разрезов графа порождает спектр рёберных разрезов графа и определяет вес ребра и вершины. В отличие от порождения итерированных рёберных графов, рассматривается итерированная цепочка квалиразрезов исходного графа, порождаемая рёберными разрезами и определяемая рекуррентным соотношением. В работе сформулированы и доказаны 2 теоремы: теорема о изоморфизме графов, имеющих изоморфные базовые рёберные разрезы, и теорема о изоморфизме графов, имеющих изоморфные гиперграфы спектра рёберных разрезов. Приведены примеры вычисления некоторых полных инвариантов графа. Показано, что решение задачи определения полного инварианта графа имеет полиномиальную сложность. Представленный в данной работе полный инвариант графа является индивидуальной характеристикой графа и может быть использован для решения задач распознавания дискретных структур.

Ключевые слова: граф, полный инвариант графа, рёберный разрез, спектр рёберных разрезов графа.

1. Матрица разрезов D графа и её свойства

Пусть $G = (V, E)$ – граф с пронумерованным множеством рёбер $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ и множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, причём $\text{card } V = n$ и $\text{card } E = m$, а L_G – множество всех рёберных суграфов этого графа. Относительно операции сложения суграфов (будем называть её кольцевой суммой [5])

$$(V, E_1) \oplus (V, E_2) = (V, (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)) \quad (1)$$

множество L_G образует абелеву группу. В дальнейшем группу L_G удобно рассматривать как линейное пространство над полем коэффициентов $\mathbf{GF}(2) = \{0, 1\}$. Такое пространство будем называть пространством суграфов L_G данного графа G .

Определение 1. *Несепарабельным графом G* будем называть связный неориентированный граф без петель и кратных рёбер, без мостов и точек сочленения.

Рассмотрим пространство суграфов графа G . В общем случае суграф, принадлежащий подпространству разрезов S , будем называть квалиразрезом [2].

Определение 2. *Центральным разрезом* будем называть квалиразрез, состоящий из инцидентных рёбер принадлежащих данной вершине и будем его обозначать $s(v_j)$ для j – вершины (рис. 1,а).

Определение 3. *Рёберным разрезом* будем называть квалиразрез, образованный из инцидентных рёбер принадлежащих двум конечным вершинам данного ребра, за исключением самого ребра, и будем его обозначать $w(e_i)$ для текущего ребра e_i , где $i = \overline{1, m}$. (рис. 1,б).

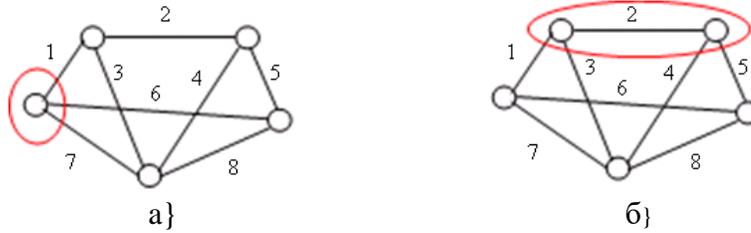


Рис. 1. Центральный разрез $\{e_1, e_6, e_7\}$ и рёберный разрез $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$.

Как правило, для представления графа используется матрица инцидентий $\mathbf{B}(\mathbf{G})$. Матрица смежностей графа $\mathbf{A}(\mathbf{G})$, может быть вычислена по формуле:

$$\mathbf{A}(\mathbf{G}) = \mathbf{B}(\mathbf{G}) \times \mathbf{B}(\mathbf{G})^T - \rho(\mathbf{G}) \times \mathbf{I}, \quad (2)$$

где $\rho(\mathbf{G})$ – вектор локальных степеней графа, \mathbf{I} – единичная матрица [7].

Если вместо единиц матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{G})$, в соответствующих ячейках записать идентификатор ребра согласно трёхместному предикату графа (например, пусть это будет цвет), то получим матрицу разрезов графа $\mathbf{D}(\mathbf{G})$. Сказанное рассмотрим на примере графа представленного на рис. 2 (допустим, что здесь буквы латинского алфавита обозначают цвет ребра).

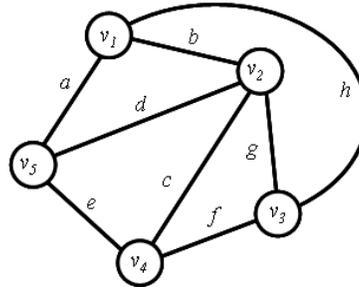


Рис. 2. Граф \mathbf{G} .

Матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{G})$ и $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ для графа \mathbf{G} имеют вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{G}) = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & & 1 & 1 & & 1 \\ v_2 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & & 1 & \\ v_4 & & 1 & 1 & & 1 \\ v_5 & 1 & 1 & & 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{G}) = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & & b & h & & a \\ v_2 & b & & g & c & d \\ v_3 & h & g & & f & \\ v_4 & & c & f & & e \\ v_5 & a & d & & e & \end{array}$$

Из матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ можно сформировать и матрицу смежностей графа $\mathbf{A}(\mathbf{G})$, и матрицу инцидентий графа $\mathbf{B}(\mathbf{G})$. Кроме того, рассматривая матрицу $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ можно записать трёхместный предикат $\mathbf{P}(\mathbf{G})$, ставящий в соответствие ребру две вершины:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{G}) = a &\rightarrow [(v_1, v_5) \vee (v_5, v_1)]; \\ b &\rightarrow [(v_1, v_2) \vee (v_2, v_1)]; \\ c &\rightarrow [(v_2, v_4) \vee (v_5, v_2)]; \\ d &\rightarrow [(v_2, v_5) \vee (v_5, v_2)]; \\ e &\rightarrow [(v_1, v_5) \vee (v_5, v_1)]; \\ f &\rightarrow [(v_3, v_4) \vee (v_4, v_3)]; \\ g &\rightarrow [(v_2, v_3) \vee (v_3, v_2)]; \\ h &\rightarrow [(v_1, v_3) \vee (v_3, v_1)]. \end{aligned}$$

Рассматривая строки (столбцы) матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ можно определить центральные разрезы графа \mathbf{G} , путём перечисления элементов строк (столбцов):

$$\begin{aligned}
s_1 &= \{b, h, a\}; \\
s_2 &= \{b, g, c, d\}; \\
s_3 &= \{h, g, f\}; \\
s_4 &= \{c, f, e\}; \\
s_5 &= \{a, d, e\}.
\end{aligned}$$

Одновременно рассматривая строки и столбцы матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ для выбранного ребра e_i можно определить базовые рёберные разрезы графа \mathbf{G} (рёберные разрезы 1-го уровня) [3]:

$$\begin{aligned}
w_1(a) &= s_1 \oplus s_5 = \{b, h, d, e\}; \\
w_1(b) &= s_1 \oplus s_2 = \{a, h, g, c, d\}; \\
w_1(c) &= s_2 \oplus s_4 = \{b, g, d, f, e\}; \\
w_1(d) &= s_2 \oplus s_5 = \{a, e, b, g, c\}; \\
w_1(e) &= s_4 \oplus s_5 = \{c, f, a, d\}; \\
w_1(f) &= s_3 \oplus s_4 = \{h, g, c, e\}; \\
w_1(g) &= s_2 \oplus s_3 = \{h, f, b, c, d\}; \\
w_1(h) &= s_1 \oplus s_3 = \{b, a, g, f\}.
\end{aligned}$$

Будем обозначать подмножество рёбер рёберного разреза буквой латинского алфавита $w_k(e_i)$, где k -номер уровня, а в качестве аргумента использовать ребро e_i . Результаты рёберных разрезов 1-го (базового) уровня служат основой для построения порождаемых рёберных разрезов следующих уровней.

Рёберный разрез $w_k(e_i)$ можно рассматривать как элемент множества разрезов графа $\mathbf{S}(\mathbf{G})$. В классической теории графов рёбра рёберного графа $L(\mathbf{G})$, порождают новый рёберный граф $L(L(\mathbf{G}))$ и т. д. [7]. В общем случае можно определить итерированный рёберный граф рекуррентным соотношением $L_n(\mathbf{G}) = L(L_{n-1}(\mathbf{G}))$, $n \geq 2$. Можно заметить, что количество рёбер при переходе от рёберного графа $L_{n-1}(\mathbf{G})$ к графу $L_n(\mathbf{G})$ увеличивается.

В отличие от порождения итерированных рёберных графов, мы будем рассматривать цепочку порождения итерированных квалиразрезов исходного графа, определяемых рекуррентным соотношением $W_k(\mathbf{G}) = W(W_{k-1}(\mathbf{G}))$, $k \geq 1$ по принципу: квалиразрез k -го уровня $W_k(\mathbf{G})$ порождается квалиразрезом $k-1$ уровня $W_{k-1}(\mathbf{G})$. В отличие от цепочки рёберных графов, такая цепочка порождает разрезы исходного графа всегда с количеством не более величины m – количества рёбер, и такое порождение всегда конечно, так как конечно количество суграфов исходного графа [5]. Порождение цепочек квалиразрезов $k+1$ уровня графа \mathbf{G} для каждого ребра осуществляется путём сложения по модулю 2 рёберных разрезов k -го уровня этого ребра. Каждое новое подмножество рёбер формируется рекурсивно на основе предыдущего множества с помощью функции θ :

$$w_k(e_i) = \begin{cases} w_k(e_i) = \theta(w_{k-1}(e_i)); \\ \text{если } w_k(e_i) \equiv w_h(e_i), \text{ то } w_k(e_i) = \emptyset. \end{cases} \quad (3)$$

где i – номер ребра, k – номер уровня, h – номер произвольного предыдущего уровня.

Преобразование θ для рёбер определим следующим образом:

$$\theta(\{a, b, c, \dots, n\}) = w_1(a) \oplus w_1(b) \oplus w_1(c) \oplus \dots \oplus w_1(n). \quad (4)$$

θ – оператор порождения рёберного разреза последующего уровня определяет строку для последующего уровня рёберного разреза ребра e_i , когда подмножество предыдущего уровня состоит из множества рёбер $\{a, b, c, \dots, n\}$ суграфа.

Все уровневые подмножества (рёберные разрезы) также будут представлять собой

квалиразрезы исходного графа \mathbf{G} . Так первый уровень будет состоять из подмножества рёбер базового рёберного разреза графа \mathbf{G} , а все остальные – порождаться им. Будем называть их порождёнными рёберными разрезами. После получения циклического повтора рёберных разрезов одного аргумента данному подмножеству ставится в соответствие пустое множество на основании выражения (3) [3].

Например, для графа представленного на рис. 1 базовый рёберный разрез $w_1(a) = \{b, h, d, e\}$. Ребро b инцидентно вершинам v_1 и v_2 , и рёберный разрез для ребра b может рассматриваться как кольцевая сумма центральных разрезов $s_1 \oplus s_2$. Ребро h инцидентно вершинам v_1 и v_3 , и рёберный разрез для ребра h может рассматриваться как кольцевая сумма центральных разрезов $s_1 \oplus s_3$. Ребро d инцидентно вершинам v_2 и v_5 , и рёберный разрез для ребра d может рассматриваться как кольцевая сумма центральных разрезов $s_2 \oplus s_5$. Ребро e инцидентно вершинам v_4 и v_5 , и рёберный разрез для ребра e может рассматриваться как кольцевая сумма центральных разрезов $s_4 \oplus s_5$. Другими словами, порождённый рёберный разрез 2-го уровня определяется как результат кольцевого суммирования базовых рёберных разрезов соответствующего ребра (аргумента). Множество порождённых рёберных разрезов 2-го уровня имеет вид:

$$\begin{aligned} w_2(a) &= \theta(\{b, h, d, e\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_4 \oplus s_5 = s_3 \oplus s_4 = \{h, g, c, e\}; \\ w_2(b) &= \theta(\{a, h, g, c, d\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_1 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_4 = \{b, g, d, f, e\}; \\ w_2(c) &= \theta(\{b, g, d, f, e\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_4 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_2 = \{h, a, g, c, d\}; \\ w_2(d) &= \theta(\{a, e, b, g, c\}) = s_1 \oplus s_5 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 = s_2 \oplus s_3 = \{b, h, c, d, f\}; \\ w_2(e) &= \theta(\{c, f, a, d\}) = s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_3 = \{b, g, a, f\}; \\ w_2(f) &= \theta(\{h, g, c, e\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_4 \oplus s_5 = s_1 \oplus s_5 = \{b, h, d, e\}; \\ w_2(g) &= \theta(\{h, f, b, c, d\}) = s_1 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_2 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_5 = s_2 \oplus s_5 = \{a, b, g, c, e\}; \\ w_2(h) &= \theta(\{b, a, g, f\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_5 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_4 \oplus s_5 = \{a, d, c, f\}. \end{aligned}$$

Для данного графа (рис. 1), все рёберные разрезы 3-го уровня суть элементы пустого множества, так как совпадают с элементами 1-го уровня, согласно выражению (3):

$$\begin{aligned} w_3(a) &= \theta(\{h, g, c, e\}) = s_1 \oplus s_5 = \{b, h, d, e\} = \emptyset; \\ w_3(b) &= \theta(\{b, g, d, f, e\}) = s_1 \oplus s_2 = \{a, h, g, c, d\} = \emptyset; \\ w_3(c) &= \theta(\{h, a, g, c, d\}) = s_2 \oplus s_4 = \{b, g, d, f, e\} = \emptyset; \\ w_3(d) &= \theta(\{b, h, c, d, f\}) = s_2 \oplus s_5 = \{a, e, b, g, c\} = \emptyset; \\ w_3(e) &= \theta(\{b, g, a, f\}) = s_4 \oplus s_5 = \{c, f, a, d\} = \emptyset; \\ w_3(f) &= \theta(\{b, h, d, e\}) = s_3 \oplus s_4 = \{h, g, c, e\} = \emptyset; \\ w_3(g) &= \theta(\{a, b, g, c, e\}) = s_2 \oplus s_3 = \{h, f, b, c, d\} = \emptyset; \\ w_3(h) &= \theta(\{a, d, c, f\}) = s_1 \oplus s_3 = \{b, a, g, f\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Множество базовых и порождённых рёберных разрезов образует спектр рёберных разрезов графа. Рассмотрим основные свойства базового рёберного разреза.

Перенумеруем вершины в графе \mathbf{G} . Рассмотрим изоморфные графы, представленные на рис. 3-5. Оставим без изменения идентификацию (цвет) рёбер, но изменим нумерацию вершин. Тогда:

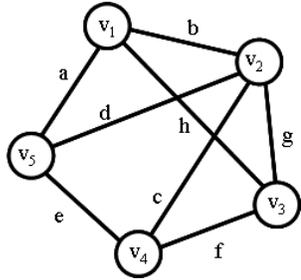
$$\begin{aligned} w_1(a) &= [s_1 \oplus s_5]_{G_1} = [s_2 \oplus s_4]_{G_2} = [s_2 \oplus s_3]_{G_3} = \{b, h, d, e\}; \\ w_1(b) &= [s_1 \oplus s_2]_{G_1} = [s_3 \oplus s_4]_{G_2} = [s_2 \oplus s_5]_{G_3} = \{a, h, g, c, d\}; \\ w_1(c) &= [s_2 \oplus s_4]_{G_1} = [s_1 \oplus s_3]_{G_2} = [s_4 \oplus s_5]_{G_3} = \{b, g, d, f, e\}; \\ w_1(d) &= [s_2 \oplus s_5]_{G_1} = [s_2 \oplus s_3]_{G_2} = [s_3 \oplus s_5]_{G_3} = \{a, e, b, g, c\}; \end{aligned}$$

$$w_1(e) = [s_4 \oplus s_5]_{G_1} = [s_1 \oplus s_2]_{G_2} = [s_3 \oplus s_4]_{G_3} = \{c, f, a, d\};$$

$$w_1(f) = [s_3 \oplus s_4]_{G_1} = [s_1 \oplus s_5]_{G_2} = [s_1 \oplus s_4]_{G_3} = \{h, g, c, e\};$$

$$w_1(g) = [s_2 \oplus s_3]_{G_1} = [s_3 \oplus s_5]_{G_2} = [s_1 \oplus s_5]_{G_3} = \{h, f, b, c, d\};$$

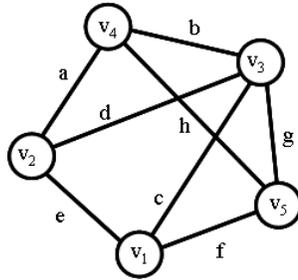
$$w_1(h) = [s_1 \oplus s_3]_{G_1} = [s_4 \oplus s_5]_{G_2} = [s_1 \oplus s_2]_{G_3} = \{b, a, g, f\}.$$



$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

x_1		b	h		a
x_2	b		g	c	d
x_3	h	g		f	
x_4		c	f		e
x_5	a	d		e	

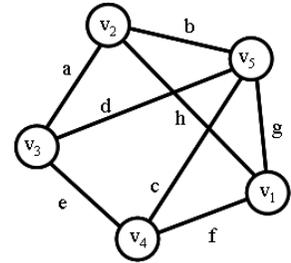
Рис. 3. Граф G_1 .



$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

x_1		e	c		f
x_2	e		d	a	
x_3	c	d		b	g
x_4		a	b		h
x_5	f		g	h	

Рис. 4. Граф G_2 .



$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

x_1		h		f	g
x_2	h		a		b
x_3		a		e	d
x_4	f		e		c
x_5	g	b	d	c	

Рис. 5. Граф G_3 .

Как видно, при перестановке вершин суграфы базовых рёберных разрезов остаются неизменными, изменяется только запись кольцевой суммы центральных разрезов для базовых рёберных разрезов. Таким образом, множество базовых рёберных разрезов можно считать неким постоянным элементом графа, не зависящим от перестановки вершин. Воспользуемся данным свойством для дальнейшего решения задачи определения изоморфизма графов.

2. Изоморфизм базовых рёберных разрезов

Будем сравнивать два изоморфных графа G и H , имеющих одинаковое количество вершин и рёбер с равными упорядоченными векторами локальных степеней. Имеем два множества базовых рёберных разрезов графов $W_1(G)$ и $W_1(H)$ (рис. 6):

$$W_1(G) = \{w_1(g_1), w_1(g_2), \dots, w_1(g_m)\} \text{ и } W_1(H) = \{w_1(h_1), w_1(h_2), \dots, w_1(h_m)\}.$$

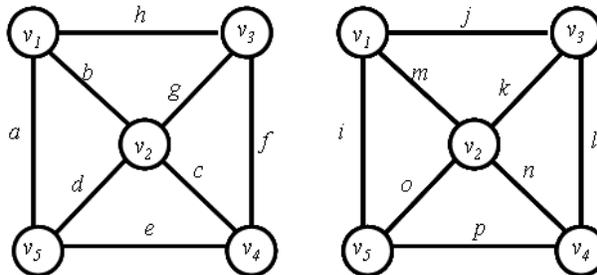


Рис. 6. Графы G и H .

Матрицы разрезов $D(G)$ и $D(H)$ имеют вид:

$$D(G) =$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		b	h		a
v_2	b		g	c	d
v_3	h	g		f	
v_4		c	f		e
v_5	a	d		e	

$$D(H) =$$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1		m	j		i
v_2	m		k	n	o
v_3	j	k		l	
v_4		n	l		p
v_5	i	o		p	

Составим двудольный граф для пар базовых рёберных разрезов графов G и H , и будем называть такой граф *двудольным графом базовых рёберных разрезов* и обозначать $Q(W_g, W_h)$. В таком двудольном графе $Q(W_g, W_h)$ вершины одной части представляют собой элементы из множества $W(G)$ базовых рёберных разрезов графа G , а вершины второй части представляют собой элементы из множества $W(H)$ базовых рёберных разрезов графа H . Соединим рёбрами вершины двух частей графа $Q(W_g, W_h)$ так, чтобы рёбра связывали только вершины характеризующие множества равных мощностей.

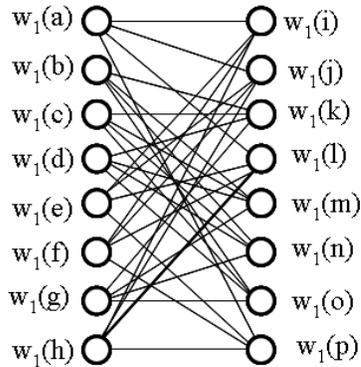


Рис. 7. Граф $Q(W_g, W_h)$.

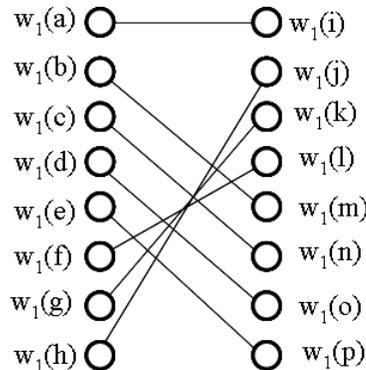


Рис. 8. Трансверсаль Tr_1 графа $Q(W_g, W_h)$.

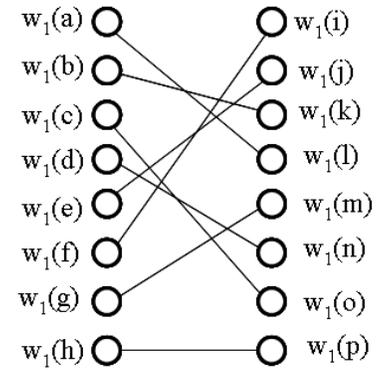


Рис. 9. Трансверсаль Tr_2 графа $Q(W_g, W_h)$.

В нашем примере (рис. 6) двудольный граф $Q(W_g, W_h)$ имеет вид представленный на рис. 7.

Рассмотрим задачу паросочетания в графе $Q(W_g, W_h)$. Все множество паросочетаний для графа $Q(W_g, W_h)$ может быть представлено матроидом трансверсалей Tr графа $Q(W_g, W_h)$. В графе $Q(W_g, W_h)$ выделим трансверсаль Tr_1 . Рёбра $\beta_i \in Q(W_g, W_h)$, $i \in \overline{1, m}$, выделенной трансверсали Tr_1 двудольного графа $Q(W_g, W_h)$, упорядочим по номерам записей. Будем проверять истинность для выбранного соответствия пар базовых рёберных разрезов.

Для нашего примера (рис. 6) базовые рёберные разрезы имеют вид:

$W_1(G)$:

$$w_1(a) = \{b, h, d, e\}$$

$$w_1(b) = \{a, h, g, c, d\}$$

$$w_1(c) = \{b, g, d, f, e\}$$

$$w_1(d) = \{a, e, b, g, c\}$$

$$w_1(e) = \{c, f, a, d\}$$

$$w_1(f) = \{h, g, c, e\}$$

$$w_1(g) = \{h, f, b, c, d\}$$

$$w_1(h) = \{b, a, g, f\}$$

$W_1(H)$:

$$w_1(i) = \{m, j, o, p\}$$

$$w_1(j) = \{i, m, k, l\}$$

$$w_1(k) = \{l, j, m, n, o\}$$

$$w_1(l) = \{j, k, n, p\}$$

$$w_1(m) = \{i, j, k, n, o\}$$

$$w_1(n) = \{l, p, m, k, o\}$$

$$w_1(o) = \{i, p, m, k, n\}$$

$$w_1(p) = \{i, o, n, l\}$$

Выбираем трансверсаль Tr_1 представленную на рис. 8. Пронумеруем рёбра

трансверсали $T_{Г1}$.

ребро	инцидентные вершины	инцидентные вершины как множество
β_1	$w_1(a) \& w_1(i)$	$w_1(a) = \{b, h, d, e\} \& w_1(i) = \{m, j, o, p\}$
β_2	$w_1(b) \& w_1(m)$	$w_1(b) = \{a, h, g, c, d\} \& w_1(m) = \{i, j, k, n, o\}$
β_3	$w_1(c) \& w_1(n)$	$w_1(c) = \{b, g, d, f, e\} \& w_1(n) = \{l, p, m, k, o\}$
β_4	$w_1(d) \& w_1(o)$	$w_1(d) = \{a, e, b, g, c\} \& w_1(o) = \{i, p, m, k, n\}$
β_5	$w_1(e) \& w_1(p)$	$w_1(e) = \{c, f, a, d\} \& w_1(p) = \{i, o, n, l\}$
β_6	$w_1(f) \& w_1(l)$	$w_1(f) = \{h, g, c, e\} \& w_1(l) = \{j, k, n, p\}$
β_7	$w_1(g) \& w_1(k)$	$w_1(g) = \{h, f, b, c, d\} \& w_1(k) = \{l, j, m, n, o\}$
β_8	$w_1(h) \& w_1(j)$	$w_1(h) = \{b, a, g, f\} \& w_1(j) = \{i, m, k, l\}$

Формируем два кортежа позиционной записи $\alpha(g_i)$ и $\alpha(h_i)$ для аргументов g_i и h_i базовых рёберных разрезов трансверсали $T_{Г1}$. Каждому ребру трансверсали поставлено в соответствие две вершины. Тогда каждый кортеж позиционной записи $\alpha(e_i)$ можно представить множеством рёбер выбранной трансверсали $T_{Г1}$, в составе инцидентных вершин которых содержится аргумент базового рёберного разреза $w_1(e_i)$.

Например, для базового рёберного разреза $w_1(a)$ с аргументом a , в ребро a входят вершины базовых рёберных разрезов для рёбер трансверсали $T_{Г1}$ $a \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle$. Для базового рёберного разреза $w_1(i)$ с аргументом i , в ребро i входят вершины базовых рёберных разрезов для рёбер трансверсали $T_{Г1}$ $i \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle$. Формируем кортежи позиционной записи $\alpha(a)$ и $\alpha(i)$ для рёбер a и i :

$$a \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle \quad \& \quad i \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle, \text{ откуда}$$

$$\alpha(a) = \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle \quad \& \quad \alpha(i) = \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle.$$

После определения кортежей позиционной записи для аргументов пары базовых рёберных разрезов графа **G** и графа **H**, формируем предикат соответствия пар $\gamma(g_i, h_i)$ базовых рёберных разрезов с аргументами g_i и h_i . В случае равенства кортежей позиционной записи $\alpha(g_i) = \alpha(h_i)$ предикат $\gamma(g_i, h_i)$ имеет значение «истина», в противном случае – «ложь».

В нашем примере аргумент (ребро) a графа **G** входит во 2-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$, в 4-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$, в 5-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$ и в 8-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$. Ребро i графа **H** входит во 2-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$, в 4-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$, в 5-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$ и в 8-ое ребро трансверсали $T_{Г1}$. Кортежи позиционной записи для аргументов выбранной пары базовых рёберных разрезов равны: $\alpha(a) = \alpha(i)$. И тогда можно сформировать кортеж соответствий $\gamma(g_i, h_i)$ для пары базовых рёберных разрезов с аргументами a и i , соответствующий предикату, имеющему значение «истина».

С другой стороны, ребро a входит в состав множества базовых рёберных разрезов $w_1(b), w_1(d), w_1(e), w_1(h)$, а ребро i входит в состав множества базовых рёберных разрезов $w_1(m), w_1(o), w_1(p), w_1(j)$.

Установим истинность предикатов $\gamma(g_i, h_i)$ для всех пар базовых рёберных разрезов определенных трансверсалью $T_{Г1}$ нашего примера.

$$\{[(a \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle) \& (i \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [\alpha(a) = \alpha(i)]\} \rightarrow [\gamma(a, i) = 1];$$

$$\{[(b \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_7, \beta_8 \rangle) \& (m \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_7, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(b) = \alpha(m))]\} \rightarrow [\gamma(b, m) = 1];$$

$$\{[(c \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7 \rangle) \& (n \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(c) = \alpha(n))]\} \rightarrow [\gamma(c, n) = 1];$$

$$\begin{aligned}
& \{[(d \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_7 \rangle) \& (o \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_7 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(d) = \alpha(o))] \rightarrow [\gamma(d, o) = 1]; \\
& \{[(e \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_8 \rangle) \& (p \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(e) = \alpha(p))] \rightarrow [\gamma(e, p) = 1]; \\
& \{[(f \subset \langle \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_8 \rangle) \& (l \subset \langle \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(f) = \alpha(l))] \rightarrow [\gamma(f, l) = 1]; \\
& \{[(g \subset \langle \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_8 \rangle) \& (k \subset \langle \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(g) = \alpha(k))] \rightarrow [\gamma(g, k) = 1]; \\
& \{[(h \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_6, \beta_7 \rangle) \& (j \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_6, \beta_7 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(h) = \alpha(j))] \rightarrow [\gamma(h, j) = 1].
\end{aligned}$$

Будем определять истинность следующего соответствия между базовыми рёберными разрезами графов **G** и **H** для выделенной трансверсали Tr_2 двудольного графа $\mathbf{Q}(W_g, W_h)$ (рис. 9).

ребро	инцидентные вершины	инцидентные вершины как множество
β_1	$w_1(a) \& w_1(l)$	$w_1(a) = \{b, h, d, e\} \& w_1(l) = \{j, k, n, p\}$
β_2	$w_1(b) \& w_1(k)$	$w_1(b) = \{a, h, g, c, d\} \& w_1(k) = \{l, j, m, n, o\}$
β_3	$w_1(c) \& w_1(o)$	$w_1(c) = \{b, g, d, f, e\} \& w_1(o) = \{i, p, m, k, m\}$
β_4	$w_1(d) \& w_1(n)$	$w_1(d) = \{a, e, b, g, c\} \& w_1(n) = \{l, p, m, k, o\}$
β_5	$w_1(e) \& w_1(j)$	$w_1(e) = \{c, f, a, d\} \& w_1(j) = \{i, m, k, l\}$
β_6	$w_1(f) \& w_1(i)$	$w_1(f) = \{h, g, c, e\} \& w_1(i) = \{m, j, o, p\}$
β_7	$w_1(g) \& w_1(m)$	$w_1(g) = \{h, f, b, c, d\} \& w_1(m) = \{i, j, k, n, o\}$
β_8	$w_1(h) \& w_1(p)$	$w_1(h) = \{b, a, g, f\} \& w_1(p) = \{i, o, n, l\}$

Установим истинность предикатов $\gamma(g_i, h_i)$ для всех пар базовых рёберных разрезов определенных трансверсалью Tr_2 нашего примера:

$$\begin{aligned}
& \{[(a \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle) \& (l \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(a) = \alpha(l))] \rightarrow [\gamma(a, l) = 1]; \\
& \{[(b \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_7, \beta_8 \rangle) \& (k \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(b) \neq \alpha(k))] \rightarrow [\gamma(b, k) = 0]; \\
& \{[(c \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7 \rangle) \& (o \subset \langle \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_7, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(c) \neq \alpha(o))] \rightarrow [\gamma(c, o) = 0]; \\
& \{[(d \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_7 \rangle) \& (n \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_7, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(d) \neq \alpha(n))] \rightarrow [\gamma(d, n) = 0]; \\
& \{[(e \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6 \rangle) \& (j \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_6, \beta_7 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(e) \neq \alpha(j))] \rightarrow [\gamma(e, j) = 0]; \\
& \{[(f \subset \langle \beta_3, \beta_5, \beta_7, \beta_8 \rangle) \& (i \subset \langle \beta_3, \beta_5, \beta_7, \beta_8 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(f) = \alpha(i))] \rightarrow [\gamma(f, i) = 1]; \\
& \{[(g \subset \langle \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_8 \rangle) \& (m \subset \langle \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(g) \neq \alpha(m))] \rightarrow [\gamma(g, m) = 0]; \\
& \{[(h \subset \langle \beta_1, \beta_2, \beta_6, \beta_7 \rangle) \& (p \subset \langle \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_6 \rangle)] \rightarrow [(\alpha(h) \neq \alpha(p))] \rightarrow [\gamma(h, p) = 0].
\end{aligned}$$

После установления истинности предикатов $\gamma(g_i, h_i)$ для всех пар базовых рёберных разрезов определенных трансверсалью Tr_1 построим двудольный граф симметрий **GT**. Существование рёбер этого графа определяется значением предиката $\gamma(g_i, h_i)$ для пары рёбер. Если значение предиката $\gamma(g_i, h_i)$ есть истина, то ребро существует. Если значение предиката $\gamma(g_i, h_i)$ – ложь, то ребра не существует.

Двудольный граф симметрий **GT** для трансверсали Tr_1 имеет вид, представленный на рис. 10. Двудольный граф симметрий **GT** для трансверсали Tr_2 имеет вид, представленный на рис. 11.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если существует двудольный граф симметрий **GT** изоморфный трансверсали Tr двудольного графа $\mathbf{Q}(W_g, W_h)$, то базовые рёберные разрезы графов **G** и **H** изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверкой истинности данного утверждения служит установление изоморфизма между матрицей смежностей двудольного графа симметрий **GT** и матрицей

смежностей трансверсали T_r двудольного графа $Q(W_g, W_h)$. Лемма 1 доказана.

Примером наличия изоморфизма могут служить графы, представленные на рис. 8 и 10, а примером отсутствия изоморфизма – графы, представленными на рис. 9 и 11.

Исходя из сформулированного утверждения докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны базовые рёберные разрезы графов G и H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Если графы изоморфны, то изоморфны ребра графов G и H . Установление истинности изоморфизма между рёбрами графов G и H влечёт за собой установление изоморфизма между соответствующими базовыми рёберными разрезами графов G и H , так как в изоморфных графах изоморфные ребра формируют изоморфные базовые рёберные разрезы, состоящие из этих рёбер.

Достаточность. Обратное, наличие изоморфизма между основными рёберными разрезами графов G и H можно установить путём перебора всех трансверсалей графа двудольного $Q(W_g, W_h)$. Согласно Лемме 1 базовые рёберные разрезы изоморфны, если существует хотя бы одна трансверсаль матроида трансверсалей графа $Q(W_g, W_h)$ с равными кортежами позиционной записи для всех пар аргументов базовых рёберных разрезов графов G и H . Установление изоморфизма между базовыми рёберными разрезами графов G и H влечёт за собой установление изоморфизма между соответствующими рёбрами графов G и H , так как существует возможность, позволяющая по изоморфизму основных рёберных разрезов установить изоморфизм рёбер. С другой стороны, в изоморфных графах существуют тривиальные автоморфизмы, где нахождение изоморфизма возможно путём перебора и сравнения базовых рёберных разрезов. Теорема 1 доказана.

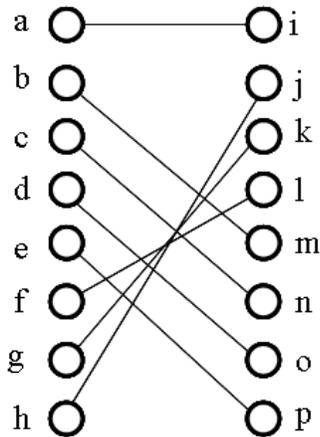


Рис. 10. Двудольный граф симметрий GT для трансверсали T_{r1}

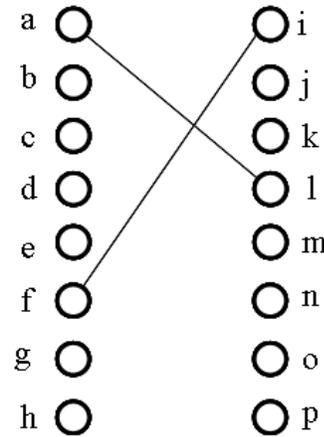


Рис. 11. Двудольный граф симметрий GT для трансверсали T_{r2} .

3. Спектр рёберных разрезов графа

Рассмотрим следующий граф G_1 (рис. 12).

Образуем множество базовых и порождённых рёберных разрезов графа G_1 . Совокупность всех рёберных разрезов будем называть *спектром рёберных разрезов графа* (по аналогии [6]). Все подмножества спектра рёберных разрезов будут представлять собой квалиразрезы исходного графа G_1 .

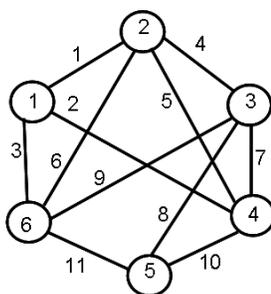


Рис. 12. Граф G_1 .

На каждом уровне образуются m подмножеств (суграфов), зависящих от выбранного ребра e_i , что даёт нам возможность построить прямоугольную матрицу спектра рёберных разрезов \mathbf{W} размером $m \times k$, где k – количество уровней. Очевидно, что элементы этой матрицы могут быть записаны либо в виде кольцевой суммы центральных разрезов, либо в виде суграфа исходного графа. В последнем случае рёберные разрезы графа состоят из подмножества рёбер и порождают ярусные квалиразрезы более высокого уровня (3).

уровни (ярусы)

	l_1	l_2	...	l_k
e_1	$w_1(e_1)$	$w_2(e_1)$...	$w_k(e_1)$
e_2	$w_1(e_2)$	$w_2(e_2)$...	$w_k(e_2)$
e_3	$w_1(e_3)$	$w_2(e_3)$...	$w_k(e_3)$
...
e_m	$w_1(e_m)$	$w_2(e_m)$...	$w_k(e_m)$

В качестве примера выделения спектра рёберных разрезов и построения матрицы \mathbf{W} , рассмотрим следующий граф G_1 (рис. 12).

Множество центральных разрезов графа:

$$\begin{aligned} s(v_1) = s_1 &= \{e_1, e_2, e_3\}; \\ s(v_2) = s_2 &= \{e_1, e_4, e_5, e_6\}; \\ s(v_3) = s_3 &= \{e_4, e_7, e_8, e_9\}; \\ s(v_4) = s_4 &= \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\}; \\ s(v_5) = s_5 &= \{e_8, e_{10}, e_{11}\}; \\ s(v_6) = s_6 &= \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\}. \end{aligned}$$

Множество базовых рёберных разрезов графа (1-й уровень квалиразрезов):

$$\begin{aligned} w_1(e_1) &= s_1 \oplus s_2 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_1, e_4, e_5, e_6\} = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}; \\ w_1(e_2) &= s_1 \oplus s_4 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_{10}\}; \\ w_1(e_3) &= s_1 \oplus s_6 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} = \{e_1, e_2, e_6, e_9, e_{11}\}; \\ w_1(e_4) &= s_2 \oplus s_3 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} = \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}; \\ w_1(e_5) &= s_2 \oplus s_4 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}; \\ w_1(e_6) &= s_2 \oplus s_6 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} = \{e_1, e_3, e_4, e_5, e_9, e_{11}\}; \\ w_1(e_7) &= s_3 \oplus s_4 = \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} = \{e_2, e_4, e_5, e_8, e_9, e_{10}\}; \\ w_1(e_8) &= s_3 \oplus s_5 = \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} = \{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}; \\ w_1(e_9) &= s_3 \oplus s_6 = \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} = \{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{11}\}; \\ w_1(e_{10}) &= s_4 \oplus s_5 = \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} = \{e_2, e_5, e_7, e_8, e_{11}\}; \\ w_1(e_{11}) &= s_5 \oplus s_6 = \{e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} = \{e_3, e_6, e_8, e_9, e_{10}\}. \end{aligned}$$

Множество порождённых рёберных разрезов 2-го уровня (яруса):

$$w_2(e_1) = \theta(\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 =$$

$$= \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} = \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_2(e_2) = \theta(\{e_1, e_3, e_5, e_7, e_{10}\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_4 \oplus s_5 =$$

$$= s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_6 = \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\};$$

$$w_2(e_3) = \theta(\{e_1, e_2, e_6, e_9, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_6 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_3 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_6 = \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\};$$

$$w_2(e_4) = \theta(\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_6 =$$

$$= s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_5 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} =$$

$$= \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_2(e_5) = \theta(\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_4 \oplus s_5 =$$

$$= s_2 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_6 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_2(e_6) = \theta(\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_9, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_6 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_2 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_6 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_2(e_7) = \theta(\{e_2, e_4, e_5, e_8, e_9, e_{10}\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_6 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_6 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_2(e_8) = \theta(\{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = s_2 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_6 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_2 \oplus s_3 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} = \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_2(e_9) = \theta(\{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_6 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_2(e_{10}) = \theta(\{e_2, e_5, e_7, e_8, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_1 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_6 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_2(e_{11}) = \theta(\{e_3, e_6, e_8, e_9, e_{10}\}) = s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_6 \oplus s_5 \oplus s_6 =$$

$$= s_1 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_6 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} =$$

$$= \{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}.$$

Множество порождённых рёберных разрезов 3-го уровня (яруса):

$$w_3(e_1) = \theta(\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_6 =$$

$$= s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_5 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} =$$

$$= \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_3(e_2) = \theta(\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 =$$

$$= \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} = \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_3(e_3) = \theta(\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 = s_2 \oplus s_3 =$$

$$= \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} = \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_3(e_4) = \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus$$

$$\oplus s_3 \oplus s_6 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_5 \oplus s_6 = \emptyset;$$

$$w_3(e_5) = \theta(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus$$

$$\oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_6 = s_1 \oplus s_5 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\};$$

$$\begin{aligned}
w_5(e_1) &= \emptyset; \\
w_5(e_2) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_3) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_4) &= \emptyset; \\
w_5(e_5) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_6) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_7) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_8) &= \emptyset; \\
w_5(e_9) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_{10}) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset; \\
w_5(e_{11}) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Цепочка порождённых рёберных разрезов для ребра e_5 имеет вид:

$$\begin{aligned}
w_1(e_5) &= s_2 \oplus s_4 = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}; \\
w_2(e_5) &= \theta(\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_4 \oplus s_5 = \\
&= s_2 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_6 = \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_2, e_5, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_3, e_6, e_9, e_{11}\} = \\
&= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\}; \\
w_3(e_5) &= \theta(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus \\
&\oplus s_5 \oplus s_3 \oplus s_6 = s_1 \oplus s_5 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}; \\
w_4(e_5) &= \theta(\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_5 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_5 \oplus \\
&\oplus s_6 = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_5 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus \{e_1, e_4, e_5, e_6\} \oplus \{e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_8, e_{10}, e_{11}\} = \\
&= \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}; \\
w_5(e_5) &= \theta(\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}) = s_1 \oplus s_4 \oplus s_1 \oplus s_6 \oplus s_2 \oplus s_4 \oplus s_2 \oplus s_6 \oplus s_3 \oplus s_4 \oplus s_3 \oplus \\
&\oplus s_6 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_5 \oplus s_6 = \emptyset.
\end{aligned}$$

Цепочку порождённых рёберных разрезов можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
w_1(e_5) = s_2 \oplus s_4 &\rightarrow w_2(e_5) = s_2 \oplus s_4 \oplus s_5 \oplus s_6 \rightarrow w_3(e_5) = s_1 \oplus s_5 \rightarrow \\
&\rightarrow w_4(e_5) = s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_5 \rightarrow w_5(e_5) = \emptyset.
\end{aligned}$$

И так для каждого ребра.

Уровень (ярус) будем обозначать маленькой буквой латинского алфавита l .

Если элементы матрицы $\mathbf{W}(\mathbf{G})$ записаны в виде суграфов, то матрица рёберных разрезов имеет вид:

ребро	l_1	l_2	l_3	l_4
e_1	$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	\emptyset
e_2	$\{e_1, e_3, e_5, e_7, e_{10}\}$	$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_3	$\{e_1, e_2, e_6, e_9, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_4	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	\emptyset	\emptyset ;
e_5	$\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_6	$\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_9, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_7	$\{e_2, e_4, e_5, e_8, e_9, e_{10}\}$	$\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_8	$\{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	\emptyset
e_9	$\{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{11}\}$	$\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_{10}	$\{e_2, e_5, e_7, e_8, e_{11}\}$	$\{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_{11}	$\{e_3, e_6, e_8, e_9, e_{10}\}$	$\{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$

Поскольку каждый элемент матрицы $w_{i,j} \in \mathbf{W}$ характеризуется двумя параметрами –

строкой и столбцом, каждая строка характеризуется подмножеством рёберных разрезов для выбранного ребра e_i . Заметим, что при определении изоморфизма для матрицы смежностей приходится одновременно переставлять строки и столбцы матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{G})$. Структура матрицы $\mathbf{W}(\mathbf{G})$, в отличие от матрицы смежностей графа, позволяет рассматривать, оценивать, переставлять, и сравнивать между собой отдельно либо только строки, либо только столбцы.

Перейдём к рассмотрению цепочки преобразований рёберных разрезов для ребра e_i . Определим следующее преобразование для ребра e_i :

$$\Delta_{k,k+1}(e_i) = w_k(e_i) \oplus w_{k+1}(e_i) \quad (5)$$

где $k, k+1$ – номер уровня. Будем называть данное преобразование *обратным преобразованием ребра e_i уровня $k, k+1$* .

Кольцевое сложение предыдущего рёберного разреза ребра с преобразованием $\Delta_{k,k+1}(e_i)$ порождает последующий рёберный разрез ребра. Обратное, кольцевое сложение последующего рёберного разреза ребра с преобразованием $\Delta_{k,k+1}(e_i)$ порождает предыдущий рёберный разрез ребра. Таким образом, применение преобразования $\Delta_{k,k+1}(e_i)$ к рёберным разрезам ребра однозначно как в прямом направлении, так и в обратном направлении. Это можно записать в виде выражений:

$$\begin{cases} w_k(e_i) \oplus \Delta_{k,k+1} = w_{k+1}(e_i); \\ w_{k+1}(e_i) \oplus \Delta_{k,k+1} = w_k(e_i). \end{cases} \quad (6)$$

Элементы матрицы обратных преобразований Δ образуют спектр обратных преобразований. Элементы матрицы обратных преобразований Δ в записи суграфов графа имеют вид:

	$\Delta_{1,2}(e_i)$	$\Delta_{2,3}(e_i)$	$\Delta_{3,4}(e_i)$	$\Delta_{4,5}(e_i)$
e_1	$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	\emptyset
e_2	$\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_9\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_3	$\{e_1, e_3, e_4, e_5, e_9, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_9\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_4	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	\emptyset	\emptyset
e_5	$\{e_3, e_6, e_8, e_9, e_{10}\}$	$\{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_6	$\{e_2, e_5, e_7, e_8, e_{11}\}$	$\{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_7	$\{e_1, e_2, e_6, e_9, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_8	$\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$	\emptyset
e_9	$\{e_1, e_3, e_5, e_7, e_{10}\}$	$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	$\{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_{10}	$\{e_2, e_4, e_5, e_8, e_9, e_{10}\}$	$\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$
e_{11}	$\{e_3, e_4, e_6, e_7, e_8, e_{11}\}$	$\{e_1, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\}$	$\{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\}$

Для примера рассмотрим обратное преобразование графа \mathbf{G}_1 представленного на рис. 12. Цепочку порождённых рёберных разрезов для ребра e_5 можно представить в виде:

$$w_1(e_5) = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\};$$

$$w_2(e_5) = w_1(e_5) \oplus \Delta_{1,2}(e_5) = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\} \oplus \{e_3, e_6, e_8, e_9, e_{10}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_3(e_5) = w_2(e_5) \oplus \Delta_{2,3}(e_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_4(e_5) = w_3(e_5) \oplus \Delta_{3,4}(e_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\} =$$

$$= \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_5(e_5) = w_4(e_5) \oplus \Delta_{4,5}(e_5) = \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} = \emptyset.$$

Цепочку обратных преобразований для ребра e_5 можно представить в виде:

$$w_4(e_5) = w_5(e_5) \oplus \Delta_{4,5}(e_5) = \emptyset \oplus \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} = \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_3(e_5) = w_4(e_5) \oplus \Delta_{3,4}(e_5) = \{e_2, e_3, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_1, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\} =$$

$$= \{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\};$$

$$w_2(e_5) = w_3(e_5) \oplus \Delta_{2,3}(e_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_8, e_{10}, e_{11}\} \oplus \{e_4, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\};$$

$$w_1(e_5) = w_2(e_5) \oplus \Delta_{1,2}(e_5) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_9\} \oplus \{e_3, e_6, e_8, e_9, e_{10}\} = \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_{10}\}.$$

Подобным образом осуществляются преобразования и для других рёбер графа.

Удобным представлением элементов спектра рёберных разрезов являются гиперграфы. Гиперграфы позволяют представить не только отдельные элементы спектра рёберных разрезов, но и представить строки и столбцы матрицы рёберных разрезов

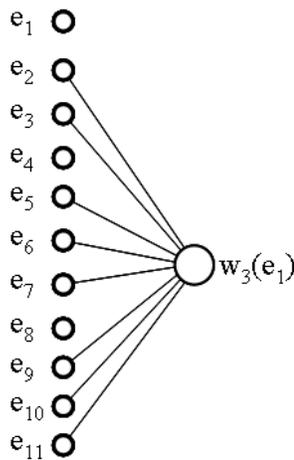


Рис. 13. Гиперграф элемента $w_3(e_1)$.

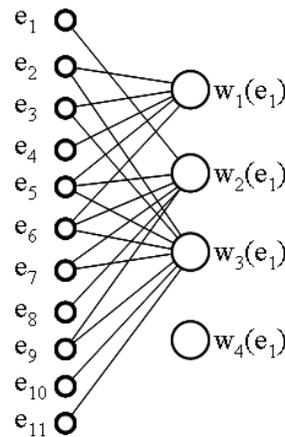


Рис. 14. Гиперграф строки ребра e_1 .

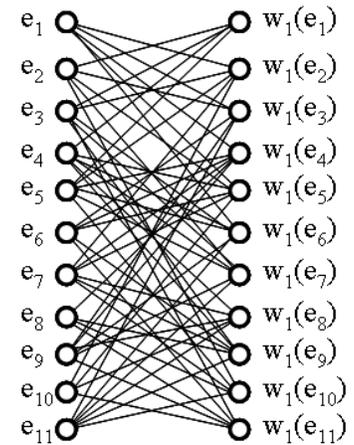


Рис. 15. Гиперграф столбца l_1 .

На рис. 13 представлен гиперграф отдельного элемента $w_3(e_1)$ спектра рёберных разрезов графа G_1 . Множество вершин гиперграфа характеризует ребра графа G_1 , а ребро гиперграфа характеризует отдельный элемент спектра рёберных разрезов. На рис. 14 представлен гиперграф строки для ребра e_1 спектра рёберных разрезов графа G_1 . Множество вершин гиперграфа характеризует ребра графа G_1 , а ребра гиперграфа характеризуют рёберные разрезы, порождённые ребром e_1 . На рис. 15 представлен гиперграф столбца l_1 спектра рёберных разрезов графа G_1 . Здесь множество вершин гиперграфа характеризует ребра графа G_1 , а ребра гиперграфа характеризуют суграфы спектра рёберных разрезов уровня l_1 .

Следует заметить, что указанным выше способом устанавливается изоморфизм порождаемых рёберных разрезов для каждого уровня спектра рёберных разрезов.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны гиперграфы спектра рёберных разрезов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Если графы изоморфны, то существует изоморфизм их рёбер и вершин. Следовательно, изоморфны и базовые рёберные разрезы рёбер графа. Применение однозначного преобразования θ , как суммы рёберных разрезов (3), приводит к образованию последующих изоморфных рёберных разрезов.

Достаточность. Так как существует взаимно-однозначное преобразование $\Delta_{k,k+1}(e_i)$, как в

прямом, так и в обратном направлениях и оно однозначно, то последний порождённый пустой рёберный разрез может быть достроен до основного рёберного разреза путём кольцевого суммирования используя выражение (5). Но тогда, если существует изоморфизм базовых рёберных разрезов, то существует и изоморфизм порождённых рёберных разрезов, и согласно теореме 1 существуют изоморфные ребра графов **G** и **H**. Тогда графы изоморфны.

Следовательно, графы **G** и **H** изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфен спектр рёберных разрезов графов. В свою очередь, спектру рёберных разрезов можно поставить в соответствие гиперграфы спектра рёберных разрезов. Таким образом можно записать содержание теоремы в терминах теории графов.

Теорема 2 доказана.

4. Полный инвариант графа

Для оценки ребра в графе, введём понятие веса ребра. Каждой строке матрицы $\mathbf{W}(e_i)$ можно поставить в соответствие кортеж $\xi(e_i)$, значения элементов которого называются *весом ребра* e_i в графе. Кортеж $\xi(e_i)$ определяется количеством подмножеств в строке матрицы \mathbf{W} с участием ребра e_i (Таблица 1)

Таблица 1

Разрезы	Кортеж $\xi(e_i)$
$w(e_1)$	$\langle 1,2,2,1,3,3,2,1,2,1,1 \rangle$
$w(e_2)$	$\langle 2,2,3,1,4,3,3,1,2,2,1 \rangle$
$w(e_3)$	$\langle 2,3,2,1,3,4,2,1,3,1,2 \rangle$
$w(e_4)$	$\langle 1,1,1,0,2,2,2,1,2,1,1 \rangle$
$w(e_5)$	$\langle 3,4,3,2,1,2,3,2,2,3,2 \rangle$
$w(e_6)$	$\langle 3,3,4,2,2,1,2,2,3,2,3 \rangle$
$w(e_7)$	$\langle 2,3,2,2,3,2,1,3,2,4,3 \rangle$
$w(e_8)$	$\langle 1,1,1,1,2,2,3,1,3,2,2 \rangle$
$w(e_9)$	$\langle 2,2,3,2,2,3,2,3,1,3,4 \rangle$
$w(e_{10})$	$\langle 1,2,1,1,3,2,4,2,3,2,3 \rangle$
$w(e_{11})$	$\langle 1,1,2,1,2,3,3,2,4,3,2 \rangle$

Каждому столбцу матрицы $\mathbf{W}(l_j)$, поставим в соответствие кортеж $\xi(l_j)$, элементы которого (веса рёбер) характеризуют количество подмножеств уровня с участием ребра e_i (Таблица 2).

Таблица 2

уровни	l_1	l_2	l_3	l_4
Кортеж ξ_j	$\langle 5,5,5,6,6,6,6,5,6,5,5 \rangle$	$\langle 6,5,5,8,7,7,7,6,7,5,5 \rangle$	$\langle 8,6,6,0,6,6,6,8,6,6,6 \rangle$	$\langle 0,8,8,0,8,8,8,0,8,8,8 \rangle$

Построим суммарный кортеж графа **G** как сумму элементов кортежей $\Phi_1(G) = \sum_{i=1}^m \xi(e_i)$ или

$$\Phi_1(G) = \sum_{j=1}^k \xi(l_j) :$$

$$\Phi_1(G) = \langle f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3), \dots, f_1(e_m) \rangle. \quad (7)$$

где $f_1(e_i)$ – количество всех подмножеств матрицы \mathbf{W} с участием ребра e_i .

Для графа **G**₁, (рис. 10) кортеж $\Phi_1(G_1) = \langle 19,24,24,14,27,27,27,19,27,24,24 \rangle$.

$$\begin{aligned} & \langle 1,2,2,1,3,3,2,1,2,1,1 \rangle \\ + & \langle 2,2,3,1,4,3,3,1,2,2,1 \rangle \\ + & \langle 2,3,2,1,3,4,2,1,3,1,2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + <1,1,1,0,2,2,2,1,2,1,1> \\
& + <3,4,3,2,1,2,3,2,2,3,2> \\
& + <3,3,4,2,2,1,2,2,3,2,3> \\
& + <2,3,2,2,3,2,1,3,2,4,3> \\
& + <1,1,1,1,2,2,3,1,3,2,2> \\
& + <2,2,3,2,2,3,2,3,1,3,4> \\
& + <1,2,1,1,3,2,4,2,3,2,3> \\
& + <1,1,2,1,2,3,3,2,4,3,2> \\
& = <19,24,24,14,27,27,27,19,27,24,24>
\end{aligned}$$

или как результат сложения кортежей ξ_j для столбцов:

$$\begin{aligned}
& <5,5,5,6,6,6,6,5,6,5,5> \\
& + <6,5,5,8,7,7,7,6,7,5,5> \\
& + <8,6,6,0,6,6,6,8,6,6,6> \\
& + <0,8,8,0,8,8,8,0,8,8,8> \\
& = <19,24,24,14,27,27,27,19,27,24,24>
\end{aligned}$$

Для установления изоморфизма графов необходим инвариант. Пусть φ – функция, относящая каждому графу \mathbf{G} некоторый элемент $\varphi(\mathbf{G})$ из множества \mathbf{M} произвольной природы. Эту функцию называют инвариантом, если на изоморфных графах \mathbf{G} и \mathbf{H} ($\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$) её значения совпадают, т.е. для любых \mathbf{G} и \mathbf{H}

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{H} \rightarrow \varphi(\mathbf{G}) = \varphi(\mathbf{H}). \quad (8)$$

Инвариант f называется полным, если для любых \mathbf{G} и \mathbf{H}

$$\varphi(\mathbf{G}) = \varphi(\mathbf{H}) \rightarrow \mathbf{G} \equiv \mathbf{H}. \quad (9)$$

Объединяя оба определения, можно назвать полным инвариантом графа такую функцию $\varphi(\mathbf{G})$, для которой $\varphi(\mathbf{G}) = \varphi(\mathbf{H})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G} \equiv \mathbf{H}$.

При определении изоморфизма графов \mathbf{G} и \mathbf{H} , для сравнения результатов лучше всего расположить веса рёбер из кортежа $\Phi_1(\mathbf{G})$ по возрастанию и тем самым сформировать вектор $F_1(\mathbf{G})$ как часть полного инварианта графа \mathbf{G}_1 .

$$F_1(\mathbf{G}_1) = (14, 19, 19, 24, 24, 24, 24, 27, 27, 27, 27) \text{ или } F_1(\mathbf{G}) = (1 \times 14, 2 \times 19, 4 \times 24, 4 \times 27).$$

Теперь можно задать вес каждой вершины как сумму весов f_1 инцидентных рёбер:

$$\begin{aligned}
s_1(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3)) &\rightarrow 19 + 24 + 24 = 67; \\
s_2(f_1(e_1), f_1(e_4), f_1(e_5), f_1(e_6)) &\rightarrow 19 + 14 + 27 + 27 = 87; \\
s_3(f_1(e_4), f_1(e_7), f_1(e_8), f_1(e_9)) &\rightarrow 14 + 27 + 19 + 27 = 87; \\
s_4(f_1(e_2), f_1(e_5), f_1(e_7), f_1(e_{10})) &\rightarrow 24 + 27 + 27 + 24 = 102; \\
s_5(f_1(e_8), f_1(e_{10}), f_1(e_{11})) &\rightarrow 19 + 24 + 24 = 67; \\
s_6(f_1(e_3), f_1(e_6), f_1(e_9), f_1(e_{11})) &\rightarrow 24 + 27 + 27 + 24 = 102.
\end{aligned}$$

Построим кортеж $\Phi_2(\mathbf{G}_1)$ для вершин графа

$$\Phi_2(\mathbf{G}) = \langle b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \rangle. \quad (10)$$

где b_j – вес соответствующей вершины.

$$\Phi_2(\mathbf{G}_1) = \langle 67, 87, 87, 102, 67, 102 \rangle.$$

Построим вектор весов вершин $F_2(\mathbf{G}_1)$, взяв за основу кортеж $\Phi_2(\mathbf{G}_1)$ и расположив веса по возрастанию.

Полный инвариант графа определим как:

$$F_1(\mathbf{G}_1) \& F_2(\mathbf{G}_1) \quad (11)$$

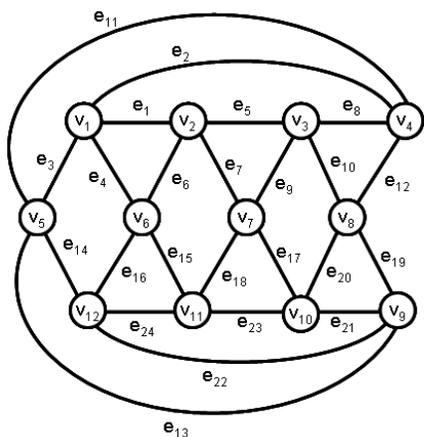


Рис. 20. Граф G_6 .

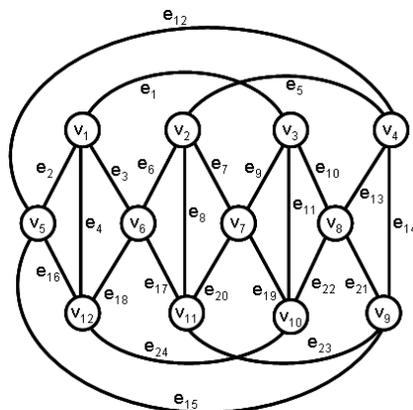


Рис. 21. Граф G_7 .

Общим для указанных графов спектром собственных значений для матрицы смежностей является вектор $(4, 2, 2, 2, 0, 0, 0, -2, -2, -2, -2, -2)$.

Полный инвариант графа G_6 : $F_1 = (24 \times 30)$ & $F_2 = (12 \times 120)$.

Полный инвариант графа G_7 : $F_1 = (8 \times 14, 16 \times 26)$ & $F_2 = (8 \times 80, 4 \times 104)$.

Изоспектральные графы G_6 и G_7 не изоморфны, так как их полные инварианты не совпадают.

Рассмотрим формирование полного инварианта для плоских графов G_8 и G_9 (рис. 22 и рис. 23).

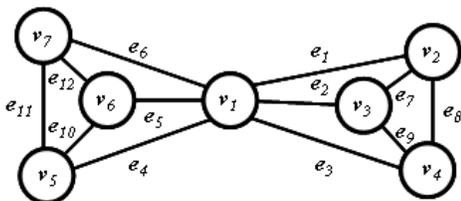


Рис. 22. Граф G_8 .

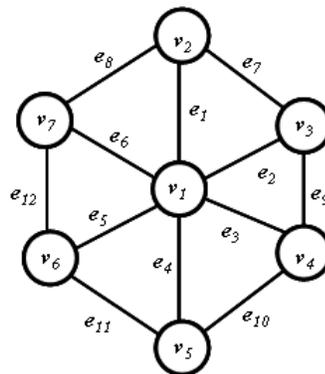


Рис. 23. Граф G_9 .

Полный инвариант графа G_8 : $F_1 = (6 \times 4, 6 \times 13)$ & $F_2 = (6 \times 21, 1 \times 78)$,

Полный инвариант графа G_9 : $F_1 = (6 \times 22, 6 \times 24)$ & $F_2 = (6 \times 68, 1 \times 144)$;

Графы не изоморфны.

Таким образом, представленный в данной работе полный инвариант графа является индивидуальной характеристикой графа и может быть использован для решения задач распознавания дискретных структур.

Количество элементарных операций для построения суграфа как элемента спектра рёберных разрезов можно определить как сумму по модулю 2 характеристических векторов размером m . Таким образом, количество элементарных операций для получения суграфа можно определить как число рёбер m . В свою очередь, размер матрицы W можно определить как $m \times m = m^2$, в предположении, что количество уровней не превосходит число рёбер. Итого, для построения матрицы W нужно применить $m \times m^2 = m^3$ элементарных операций. Для определения веса ребра нужно перебрать все элементы спектра рёберных разрезов графа, и

тогда общее количество элементарных операций также равно $m \times m^2 = m^3$. Общее количество элементарных операций можно определить как сумму операций вычисления элементов матрицы W и вычисления веса ребра $m^3 + m^3 = 2m^3$. Вычислительную сложность установления полного инварианта графа можно определить относительно рёбер графа как $O(m^3)$ или относительно вершин как $O(n^6)$.

На основе вышеизложенного можно сделать следующий вывод: *задача вычисления полного инварианта графа полиномиально разрешима*. Вычислительная сложность алгоритма построения полного инварианта равна $O(n^6)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М. О., Баранский В. В., Расин В. В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб: Лань, 2010. 368 с.
2. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. 384 с.
3. **Курапов С. В., Давидовский М. В.** Спектр рёберных разрезов графа и задача изоморфизма // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наук. статей. Фіз.-мат. науки. 2017. № 1. С.222–234.
4. **Пападимитриу Х., Стайглиц К.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 512 с.
5. **Свами М., Тхуласираман К.** Графы, сети и алгоритмы: М.: Мир, 1984. 455 с.
6. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наук. думка, 1984.
7. **Харари Ф.** Теория графов. М: Мир, 1973. 299 с.

A COMPLETE GRAPH INVARIANT

*S. V. Kurapov*¹, *M. V. Davidovsky*²

¹Zaporizhzhya National University,
66 Zhukovskogo St., Zaporizhzhya, 69600, Ukraine

²Zaporizhzhya Institute of Postgraduate Pedagogical Education
57-A Nezalezhnoy Ukrainy, Zaporizhzhya, 69035, Ukraine

E-mail: kurapovs@znu.edu.ua, m.davidovsky@gmail.com

Annotation. The article addresses the problem of determining the complete invariant of a graph constructed on the set of graph edge cuts. An edge cut is defined by an edge and central vertices incident to it. It is shown that the set of basic edge cuts of a graph generates a spectrum of graph edge cuts and determines the weight of the edge and vertex. In contrast to generating iterated edge graphs, we consider an iterated chain of quali-cuts of the original graph generated by edge cuts and determined by the recurrence relation. In the article, 2 theorems are formulated and proved: an isomorphism theorem for graphs having isomorphic basic edge cuts, and an isomorphism theorem for graphs having isomorphic hypergraphs of the edge cut spectrum. We provide several illustrative examples in order to demonstrate the calculation of some complete graph invariants. It is shown that the solution to the problem of determining the complete invariant of a graph has polynomial complexity. The complete graph invariant presented in this article is essentially an individual characteristic of the graph which can be used to solve discrete structure recognition problems.

Key words: graph, complete graph invariant, edge cut, spectrum of edge cuts.

REFERENCES

1. **M. O. Asanov, V. A. Baranskiy, V. V. Rasin**, *Diskretnaya matematika. Grafy, matroidy, algoritmy* (Discrete Mathematics. Graphs, matroids, algorithms), Lan, Saint Petersburg, 2010.
2. **A. A. Zykov**. *Fundamentals of Graph Theory*, B C S Associates, 1990.
3. **S. V. Kurapov and M. V. Davidovsky**, *Spektr rebernykh razrezov grafa i zadacha izomorfizma* (Graph edge cut and the graph isomorphism problem) // *Visnyk ZNU (Fiz.-mat. Nauky)*, No. 1, 222–234, 2017.
4. **C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz**, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
5. **M. N. S. Swamy and K. Thulasiraman**. *Graphs, networks, and algorithms*, J. Wiley & Sons, 1981.
6. **D. M. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs**. *Spectra of graphs. Theory and application*. Heidelberg/Leipzig, Johann Ambrosius Barth Verlag, 1984.
7. **F. Harary**. *Graph Theory*, Reading: Addison-Wesley, 1969.

Сведения об авторах:

1. Курапов Сергей Всеволодович

место работы:

г. Запорожье, 69600, ул. Жуковского 66,
Запорожский национальный университет,
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

E-mail: lili5050@rambler.ru

Skype: kurapov44

проживает:

Украина

69063 г.Запорожье, ул. Свердлова 31, кв.1

тел. (061) 7-64-60-19 (домашний)

моб. телефон +380673193800

2. Давидовский Максим Владимирович

место работы:

Украина, г. Запорожье, 69035, ул. Независимой Украины 57-А, Запорожский институт
последипломного педагогического образования, заведующий научно-методическим
центром информатизации образования

E-mail: m.davidovsky@gmail.com

Skype: maxim.davidovsky

проживает:

Украина

69096 г.Запорожье, ул. Бородинская 12, кв. 61

моб. телефон +380684516425