

# ПЛАНИРОВАНИЕ ЗАЩИТЫ, МИНИМИЗИРУЮЩЕЙ ДЕФИЦИТ РЕСУРСА В ХУДШЕМ СЦЕНАРИИ РАЗРУШЕНИЯ СЕТИ СНАБЖЕНИЯ \*)

*В. Л. Береснев*<sup>1,2</sup>, *А. А. Мельников*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева  
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет  
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [beresnev@math.nsc.ru](mailto:beresnev@math.nsc.ru), [melnikov@math.nsc.ru](mailto:melnikov@math.nsc.ru)

**Аннотация.** Рассматривается модель планирования защиты ребер сети снабжения некоторым ресурсом. В вершинах сети располагаются потребители и поставщики ресурса, а ребра сети позволяют мгновенно и в неограниченном количестве перемещать ресурс между вершинами. Защищающая сторона располагает ограниченным бюджетом. Она стремится определить множество ребер, защиту которых позволяет обеспечить бюджет, таким образом, чтобы минимизировать ущерб от выхода из строя части незащищенных ребер. В качестве меры ущерба используется суммарный объем дефицита ресурса, возникающий в худшем сценарии разрушения сети. Задача защищающейся стороны таким образом представляет задачу семейства “защитник–атакующий”, формализуемую в виде минимаксной смешанно-целочисленной задачи математического программирования. Для отыскания оптимального решения защищающейся стороны предложено две схемы генерации отсечений, опирающихся на переформулировку задачи в виде задачи смешанно-целочисленного математического программирования с экспоненциальным числом ограничений. Табл. 2, рис. 4, библиогр. 13.

**Ключевые слова:** Задача “защитник-атакующий”, суммарный дефицит, генерация отсечений.

## 1. Введение

Для многих систем, поддерживающих функционирование и развитие общества, характерно сетевое устройство, при котором можно выделить условных потребителей и поставщиков некоторого ресурса, а также пути, по которым происходит движение данного ресурса. Любую такую систему можно обобщенно изображать в виде сети, то есть множества

---

\*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01021).

вершин и ребер, соединяющих некоторые пары вершин. При этом вершины сети обозначают потребителей и поставщиков ресурса, а ребра — связи между вершинами, то есть каналы транспортировки ресурса.

Нормальное функционирование сетевых систем является в ряде случаев критически важным состоянием, поскольку транспортировка многих значимых товаров и услуг таких как коммунальные услуги — водо-, энерго- и теплоснабжение, нефть и газ, телекоммуникационные данные и многие другие осуществляется в рамках подобной организации. При этом тенденция к росту сетей с одной стороны и росту числа природных и террористических угроз с другой ведет к значительному увеличению масштабов последствий возможных нарушений в работе таких систем. Данная динамика обуславливает повышенный интерес к исследованиям в области безопасности инфраструктурных объектов, сопровождаемый значительным прогрессом в сфере построения математических моделей и методов поиска решений в рамках данных моделей.

Устойчивое функционирование системы доставки товаров закладывается на уровне дизайна сети снабжения [1]. При этом используются различные метрики, характеризующие устойчивость в определенном смысле. В основе таких метрик лежат обычно топологические свойства сети такие как связность и характеристики кратчайших путей в сети.

Анализ качественных явлений, возникающих в графах со случайной структурой, описываемой некоторыми вероятностными ограничениями, позволяет характеризовать важные пороговые состояния сетей, соответствующих смене режимов их работы. Такие переходы могут интерпретироваться, например, как начало эпидемии в сети взаимодействий людей друг с другом или потеря полносвязности информационной сети при серии случайных отказов [2, 3].

Поддержание устойчивого функционирования конкретной сети связано с противодействием рискам, вызванным в том числе плохо прогнозируемыми природными явлениями, а также человеческими действиями. Одним из важнейших критериев оценки качества решений, направленных на укрепление безопасности сетевой инфраструктуры является величина ущерба, вычисляемая в худшем случае. Такой критерий показывает максимально возможный ущерб, возникающий при реализации наиболее неблагоприятного сценария развития стихийного бедствия. С ростом опасности террористического или военного нападения возрастает роль данного критерия при планировании противодействия организованной активности стороны, заинтересованной в нанесении максимального ущерба.

При формализации задач оптимизации худшего случая естественным образом возникают минимаксные модели принятия решений [4,5]. В качестве внутренней задачи такие модели содержат формально записанную

задачу выбора сценария разрушения с максимальным значением ущерба. В литературе такие задачи часто именуют interdiction problem [6, 7] (запрещающими задачами) или задачами атакующего. Решение задачи атакующего представляет набор элементов сети, запрет использования которых в наибольшей степени снижает эффективность ее функционирования. Обобщениями запретов можно считать частичные запреты, при которых решение атакующей стороны модифицирует параметры задачи защитника такие как длины дуг [7, 8].

Возможности защищающейся стороны состоят в организации мер по предотвращению выхода из строя дуг сети. В различных постановках рассматриваются как бинарные сценарии защиты, в которых каждое ребро сети может быть уязвимо либо полностью защищено от разрушения, так и частичной защиты, подразумевающей существование промежуточных состояний.

В рамках моделей планирования защиты в зависимости от специфики рассматриваемой области используются различные метрики, характеризующие масштабы последствий разрушающего воздействия. К примеру, величина максимального потока, пропускаемого сетью, характеризует значимость данной сети. Потери от неудовлетворенного спроса и итоговые затраты на снабжения потребителей определяют стоимость использования сети [4].

В данной статье рассматривается задача планирования защиты сети снабжения, где в качестве меры ущерба выступает величина суммарного товарного дефицита, возникающего при нарушении функционирования путей доставки. Защищающаяся сторона рассматривает возможность разрушающего воздействия определенной силы и стремится распределить свои ограниченные ресурсы на защиту ребер сети так, чтобы минимизировать ущерб, полученный в худшем сценарии повреждения незащищенных ребер. Мы предполагаем бинарные запреты для каждой из сторон, что соответствует ситуации, в которой защищенное ребро не может быть разрушено, а разрушенное ребро не может быть использовано для перемещения ресурса. Полученная модель принятия решений может быть записана в виде минимаксной смешанно-целочисленной задачи математического программирования.

В разработке точных методов решения задач планирования защиты используются важные особенности таких задач. Среди них следует выделить свойство допустимых решений, позволяющее локализовать решения с меньшим значением ущерба. Подобным свойством обладают, к примеру, некоторые модели защиты вершин сети, получивших в литературе название  $r$ -interdiction problem with fortification. Точные методы явного перебора, предложенные в работах [5, 9] для таких задач, опираются на данное свойство для сокращения области поиска.

Развитие декомпозиционных подходов для решения двухуровневых оптимизационных моделей затрагивает и минимаксные модели, для которых данные идеи демонстрируют высокую эффективность [10]. Методы математического программирования, построенные по схеме генерации отсечений, а также ветвей и отсечений, опираясь на растущую производительность компьютеров и оптимизационного программного обеспечения, показывают свою практическую применимость [11, 12].

Для отыскания оптимального решения в модели планирования защиты, минимизирующей дефицит ресурса в худшем сценарии разрушения сети, мы предлагаем два алгоритма, построенные по схеме генерации отсечений. Схемы опираются на переформулировку исходной минимаксной задачи в виде задачи смешанно-целочисленного линейного программирования с экспоненциальным числом ограничений. В базовой схеме множество ограничений параметризуется множеством решений атакующей стороны. При этом отсечение генерируется при нахождении сценария разрушения сети с максимальным ущербом, поэтому мы называем такой подход накоплением решений атакующего. Базовая схема может быть модифицирована с использованием расширенного множества переменных. Дополнительные переменные связаны с разрезами графа, все ребра которых разрушены в оптимальном решении атакующей стороны. Модифицированную схему мы называем схемой накопления реберных разрезов. В вычислительных экспериментах мы исследуем работоспособность предлагаемых схем и сравниваем их друг с другом.

Таким образом, вклад данной работы состоит в формулировке задачи планирования защиты, минимизирующей суммарный дефицит ресурса в худшем сценарии разрушения. Для отыскания оптимального решения в данной модели предложены две схемы генерации отсечений. Предлагаемые схемы реализованы на базе программного пакета для решения задач смешанно-целочисленного линейного программирования и опробованы на искусственно сгенерированных данных. Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы приводим формулировку задачи планирования защиты в виде минимаксной смешанно-целочисленной модели. Раздел 3 посвящен описанию схем генерации отсечений. Обсуждение численных экспериментов и практических свойств модели проводится в разделе 4. В разделе 5 мы подводим итоги проведенной работы и намечаем направления для ее продолжения.

## 2. Постановка задачи

Будем полагать, что сеть снабжения однородным ресурсом представлена обыкновенным графом  $G$ . Вершины графа, объединенные во множество  $V$ , по отношению к указанному ресурсу представляют агрегированные либо отдельные крупные производящие и потребляющие мощности. Так в вершине  $i \in V$  полагаем известным и равным  $d_i$  баланс ресурса, то есть разность между объемами его потребления и производства. При этом вершины с отрицательным балансом производят больше ресурса, чем потребляют. Ребра между вершинами формируют множество  $E$  и соответствуют путям передачи ресурса между вершинами сети. Для каждого ребра  $e \in E$  известны затраты  $a_e$ , необходимые для его защиты. Пропускные способности ребер полагаем бесконечными. Также будем считать, что задержка при передаче ресурса отсутствует, а следовательно, соединенные вершины по отношению к рассматриваемому ресурсу разделяют общие производящие и потребляющие мощности.

В силу территориальной распределенности сети ее ребра находятся вне зоны постоянного внимания оператора сети и оказываются таким образом уязвимыми по отношению к воздействиям, способным прервать сообщение между вершинами. Такое прерывание может быть причиной возникновения дефицита ресурса в участках сети, оказавшихся отрезанными от основных производящих вершин. Оператор сети заинтересован в недопущении подобных ситуаций и способен прилагать усилия к минимизации негативных эффектов разрушающих воздействий. В такой ситуации мы можем рассматривать его как *защитника*, решающего задачу по организации безопасности сети снабжения. Будем полагать, что защитник располагает бюджетом объема  $A$ . Контролируемые защитником ребра будем называть *защищенными*, а остальные — *незащищенными*.

Защищенные ребра не могут быть разрушены, однако в общем случае обеспечить защиту всех ребер не представляется возможным. Для оценки эффективности распределения своих ресурсов защитник рассматривает наихудший с точки зрения масштабов ущерба сценарий разрушений. При этом для отдельной компоненты связности сети нежелательной является ситуация, при которой суммарный баланс вершин, попавших в одну компоненту, положителен. В такой ситуации совокупное потребление вершин превышает совокупное производство. Для компоненты связности сети определим величину дефицита равной сумме балансов вершин, входящих в компоненту, если эта сумма положительна, и нулю в противном случае. Таким образом, величина суммарного дефицита ресурса, определяющая масштабы ущерба, вычисляется как сумма дефицитов ресурса по всем компонентам связности. Отыскание наихудшего сценария может быть произведено путем решения оптимизационной задачи, в

которой величина ущерба максимизируется. При этом найденное решение может интерпретироваться как худший сценарий развития аварии на передающих ребрах либо результат спланированной атаки злоумышленника, преследующего цель создать своими действиями максимальный дефицит ресурса. Поэтому задачу поиска худшего сценария разрушения сети будем называть также *задачей атакующего*. Полагаем, что затраты атакующего на вывод из строя ребра  $e \in E$ , составляют  $b_e$ , а общий бюджет атакующего равен  $B$ . Ребра, выбранные в оптимальном решении атакующего, будем называть *атакованными*.

Для записи задачи защитника введем следующие переменные:

$x_e, e \in E$  равна единице, если ребро  $e$  защищено, и нулю в противном случае;

$z_e, e \in E$  равна единице, если ребро  $e$  атаковано, и нулю в противном случае;

$y_{ij}, i, j \in V$  равна единице, если между вершинами  $i$  и  $j$  существует путь из ребер, не являющихся атакованными, и нулю в противном случае;

$\delta_i, i \in V$  равна величине дефицита ресурса в компоненте связности сети, к которой принадлежит вершина  $i$ , если  $i$  — вершина с минимальным номером в данной компоненте связности, и нулю в противном случае.

Для краткости наборы индексных величин будем далее обозначать жирным шрифтом. К примеру,  $\mathbf{x} = (x_e), e \in E$  или  $\mathbf{y} = (y_{ij}), i, j \in V$ .

С использованием введенных обозначений задача защитника может быть записана как следующая минимаксная задача математического программирования:

$$\min_{\mathbf{x}, \delta} \max_{\mathbf{z}, \mathbf{y}} \sum_{i \in V} \delta_i \quad (1)$$

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \leq A; \quad (2)$$

$$\sum_{e \in E} b_e z_e \leq B; \quad (3)$$

$$x_e + z_e \leq 1, \quad e \in E; \quad (4)$$

$$y_{ij} \geq 1 - z_{(i,j)}, \quad (i, j) \in E, i < j; \quad (5)$$

$$y_{ij} = y_{ji}, \quad i, j \in V, i < j; \quad (6)$$

$$y_{ii} = 1, \quad i \in V; \quad (7)$$

$$y_{ik} + y_{kj} - y_{ij} \leq 1, \quad i, j, k \in V, i < j; \quad (8)$$

$$\sum_{j \in V} d_j y_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M y_{si} \leq \delta_i, \quad i \in V; \quad (9)$$

$$x_e, z_e, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad e \in E, i \in V, j \in J. \quad (10)$$

$$\delta_i \geq 0, i \in V. \quad (11)$$

Целевая функция (1) выражает суммарный дефицит ресурса в компонентах связности сети, образовавшихся в результате разрушения части ребер. Неравенства (2) и (3) выражают бюджетные ограничения, соответственно, защитника и атакующего. Ограничения (4) обеспечивают, что защищенные ребра не будут разрушены, а (5)–(8) не позволяют переменным  $y_{ij}$ ,  $i, j \in V$  принимать нулевое значение в случае, когда между  $i$  и  $v$  имеется путь, состоящий из неразрушенных ребер. Заметим, что в случае отсутствия такого пути значение 1 для указанных переменных остается допустимым, однако далее в Утверждении 1 мы покажем, что в силу оптимальности значений переменных  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  данная степень свободы не влияет на значение целевой функции. Ограничения (9) содержат достаточно большую константу  $M$ , и позволяют переменной  $\delta_i$ ,  $i \in V$  принять значение 0, если вершина  $i$  находится в одной компоненте связности с вершиной, имеющей меньший номер. В противном случае слагаемое с большой константой в левой части отсутствует, а первое слагаемое выражает суммарный дефицит ресурса во всех достижимых из  $i$  вершинах.

Обсудим понятие допустимого решения задачи (1)–(11). Заметим, что в данном случае выполняется

$$\min_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}} \max_{\mathbf{z}, \mathbf{y}} \sum_{i \in V} \delta_i = \min_{\mathbf{x}} \max_{\mathbf{z}, \mathbf{y}} \min_{\boldsymbol{\delta}} \sum_{i \in V} \delta_i.$$

При этом при фиксированных допустимых значениях  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{y}$  переменные  $(\delta_i)$ ,  $i \in V$  могут оптимизироваться независимо друг от друга. Значение целевой функции (1) в таком случае минимально, если набор  $\boldsymbol{\delta}$  по координатам минимален, то есть, в силу неравенств (9) и (11),

$$\delta_i = \max(0, \sum_{j \in V} d_j y_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M y_{si}). \quad (a)$$

Имея уже полученное выражение для  $\delta_i$ ,  $i \in V$ , можем определить понятие допустимости для  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$ . При заданных значениях  $\mathbf{x}$  будем говорить, что наборы  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  допустимы, если для них выполнены ограничения (3)–(8), (10) и для любой пары  $\mathbf{z}' = (z'_e)$  и  $\mathbf{y}' = (y'_{ij})$ , удовлетворяющей данным ограничениям при заданных  $\mathbf{x}$ , выполняется

$$\sum_{i \in V} \max(0, \sum_{j \in V} d_j y_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M y_{si}) \geq \sum_{i \in V} \max(0, \sum_{j \in V} d_j y'_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M y'_{si}). \quad (b)$$

Таким образом, четверку  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$  будем называть допустимым решением задачи (1)–(11), если она удовлетворяет ограничениям (2)–(11), значения  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  допустимы в смысле (b). Кроме того, чтобы исключить из

рассмотрения заведомо неоптимальные наборы, будем полагать, что помимо названных требований для  $\delta$  выполняется (а).

Обоснуем корректность предложенной модели. Рассмотрим  $(0,1)$ -вектор  $\mathbf{z}$  и компоненты связности  $G_1, \dots, G_H$ , на которые распадается граф  $G$  при удалении из него ребер  $e \in E$  таких, что  $z_e = 1$ . Обозначим множество вершин графа  $G_h$ ,  $h \in \{1, \dots, H\}$ , через  $V_h$ , и положим  $\mathcal{V}(\mathbf{z}) = \{V_1, \dots, V_H\}$ . Для произвольного подмножества вершин  $V' \subseteq V$  величину дефицита ресурса в данных вершинах обозначим через  $D(V') = \max\{0, \sum_{i \in V'} d_i\}$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $(\mathbf{x}, \delta, \mathbf{z}, \mathbf{y})$  — допустимое решение задачи (1)–(11). Тогда

$$\sum_{i \in V} \delta_i = \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z})} D(V').$$

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу  $\mathbf{r} = (r_{ij})$ ,  $i, j \in V$  достижимости графа  $G' = (V, E')$ , где  $E' = \{e \in E | z_e = 0\}$ . Иными словами, положим величину  $r_{ij}$  равной единице, если между вершинами  $i$  и  $j$  существует путь в графе  $G'$ , и нулю в противном случае. Заметим, что  $y_{ij} \geq r_{ij}$  для любых  $i, j \in V$ .

Для этого достаточно рассмотреть случай  $r_{ij} = 1$  для произвольных  $i, j \in V$ . Рассмотрим тогда также последовательность вершин  $i_1, i_2, \dots, i_s$ , где  $i_1 = i$ ,  $i_s = j$ , а в совокупности данные вершины — это вершины некоторого пути, соединяющего  $i$  и  $j$  в графе  $G'$  и располагающиеся в порядке их прохождения. Если  $s = 2$ , то вершины  $i_1$  и  $i_2$  соединены неразрушенным ребром, а следовательно  $y_{ij} = 1$  в силу неравенства (5) и симметричности матрицы  $(y_{ij})$ . В противном случае, когда  $s > 2$ , поскольку ребра  $(i_1, i_2)$  и  $(i_2, i_3)$  не разрушены,  $y_{i_1 i_2} = y_{i_2 i_3} = 1$ , и, в силу неравенства (8),  $y_{i_1 i_3} = 1$ . Повторяя данные рассуждения для последующих вершин пути, приходим к заключению о том, что  $y_{ij} = 1$ , и требуемое неравенство выполняется.

В силу выполнения неравенств (6)–(8) матрица  $\mathbf{y}$  задает отношение эквивалентности  $\sim_y$  на множестве  $V$ :  $i \sim_y j \iff y_{ij} = 1$ . Рассмотрим разбиение  $U_1, \dots, U_L$  множества  $V$ , состоящее из подмножеств эквивалентных между собой в смысле отношения  $\sim_y$  вершин. Другими словами, любые  $i, j \in V$  такие, что  $i \sim_y j$ , содержатся в одном и том же элементе разбиения и никакие  $i, j \in V$  такие, что  $i \not\sim_y j$ , не содержатся в одном элементе разбиения.

Поскольку  $y_{ij} \geq r_{ij}$  для всех  $i, j \in V$ , элементы разбиения  $\{U_1, \dots, U_L\}$  представляют собой объединения элементов разбиения  $\mathcal{V}(\mathbf{z})$ . Пусть  $i_h$  — вершина с наименьшим номером во множестве  $V_h$ ,  $h = 1, \dots, H$ , а  $j_l$  — вершина с наименьшим номером во множестве  $U_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Рассмотрим неравенство группы (9) с номером  $j_l$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$ . В силу

минимальности номера  $j_l$  в подмножестве  $U_l$ , данное неравенство имеет вид  $\delta_{j_l} \geq \sum_{j \in U_l} d_j$ , и по свойству (а)  $\delta_{j_l} = D(U_l)$ . Для  $j \in U_l$  такого, что  $j \neq j_l$  неравенство (9) принимает вид  $\delta_{j_l} \geq D(U_l) - \sum_{s \in V, s < i} M y_{si}$ , причем  $\sum_{s \in V, s < i} y_{si} \geq 1$ , откуда для достаточно большого  $M$  по свойству (а) имеем  $\delta_j = 0$ .

Без ограничения общности предположим, что для  $l = 1, \dots, L$  имеем  $U_l = \bigcup_{h=h_l}^{h_{l+1}-1} V_h$ , где  $1 = h_1 < h_2 < \dots \leq h_{L+1} = H + 1$ . Заметим тогда, что  $D(U_l) = \max(0, \sum_{h=h_l}^{h_{l+1}-1} \sum_{i \in V_h} d_i) \leq \sum_{h=h_l}^{h_{l+1}-1} \max(0, \sum_{i \in V_h} d_i) = \sum_{h=h_l}^{h_{l+1}-1} D(V_h)$ . Следовательно, для любого набора  $\mathbf{y}$ , удовлетворяющего ограничениям (5)–(8), (10) при заданных  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$  выполняется

$$\sum_{i \in V} \max(0, \sum_{j \in V} d_j y_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M y_{si}) \leq \sum_{i \in V} \max(0, \sum_{j \in V} d_j r_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M r_{si}).$$

Правая часть указанного неравенства равна  $\sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z})} D(V')$ . При этом набор  $\mathbf{y}' = (y'_{ij})$  такой, что  $y'_{ij} = r_{ij}$  для  $i, j \in V$  удовлетворяет ограничениям (5)–(8), (10), и в силу того, что значения  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{y}$  допустимы в смысле (b), имеем

$$\sum_{i \in V} \max(0, \sum_{j \in V} d_j y_{ij} - \sum_{s \in V, s < i} M y_{si}) = \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z})} D(V').$$

Наконец, заметим, что левая часть данного равенства по свойству (а) равна  $\sum_{i \in V} \delta_i$ , что и требовалось доказать.

Положим  $M^- = -\sum_{i \in V | d_i < 0} d_i$  и  $M^+ = \sum_{i \in V | d_i > 0} d_i$ . Заметим, что значение константы  $M$  можно положить равным  $M^+$ .

Рассмотрим далее подходы к нахождению оптимального решения сформулированной задачи, построенные по схеме генерации отсечений.

### 3. Методы решения задачи защитника

Для минимаксных задач с конечным множеством допустимых значений максимизирующих переменных успешно применяются методы генерации отсечений, основанные на переформулировке исходной задачи в виде задачи минимизации с большим числом ограничений. В данном разделе рассмотрим подробнее возможности применения такого подхода.

Введем функцию  $f$ , принимающую в качестве аргументов векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$ . Положим  $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \min_{\delta} \max_{\mathbf{y}} \sum_{i \in V} \delta_i = \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z})} D(V')$  при ограничениях (5)–(11), если векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{z}$  удовлетворяют ограничениям (4), и нулю в противном случае. Пусть  $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} \in \{0, 1\}^{|E|} : \sum_{e \in E} b_e z_e \leq B\}$ . Тогда задача (1)–(11) может быть записана следующим образом.

$$\min_{\mathbf{x}} w \quad (12)$$

$$w \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}; \quad (13)$$

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \leq A; \quad (14)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad e \in E. \quad (15)$$

Группа ограничений (13) содержит экспоненциальное число неравенств, которые могут добавляться в рамках схем генерации отсечений, о которых далее и пойдет речь.

**3.1. Накопление стратегий нападающего.** Для каждого  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$  введем вспомогательную переменную  $u_{\mathbf{z}}$ , равную единице в случае, если все ребра, атакованные согласно вектору  $\mathbf{z}$ , не являются защищенными. Изначально ограничимся рассмотрением некоторого относительно небольшого подмножества  $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$ . Тогда оптимальное значение целевой функции следующей задачи является нижней оценкой для задачи (12)–(15).

$$LB = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}, w} w \quad (16)$$

$$w \geq u_{\mathbf{z}} \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z})} D(V'), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}'; \quad (17)$$

$$u_{\mathbf{z}} \geq 1 - \sum_{e: z_e=1} x_e, \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}'; \quad (18)$$

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \leq A; \quad (19)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad e \in E; \quad (20)$$

$$u_{\mathbf{z}} \geq 0, \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}'. \quad (21)$$

Для вектора  $\mathbf{x}^* = (x_e^*)$ , являющегося частью найденного оптимального решения задачи (16)–(21), построим оптимальное решение нападающего, решив следующую вспомогательную задачу:

$$UB = \max_{\mathbf{z}, \mathbf{y}, (\delta_i^+), (\delta_i^-)} \sum_{i \in V} \delta_i^+ \quad (22)$$

$$\sum_{e \in E} b_e z_e \leq B; \quad (23)$$

$$x_e^* + z_e \leq 1, \quad e \in E; \quad (24)$$

$$y_{ij} \geq 1 - z_{(i,j)}, \quad (i, j) \in E, i < j; \quad (25)$$

$$y_{ij} = y_{ji}, \quad i, j \in V, i < j; \quad (26)$$

$$y_{ii} = 1, \quad i \in V; \quad (27)$$

$$y_{ik} + y_{kj} - y_{ij} \leq 1, \quad i, j, k \in V; \quad (28)$$

$$\sum_{j \in V} d_j y_{ij} - \sum_{s \in J, s < i} M^+ y_{si} = \delta_i^+ - \delta_i^-, \quad i \in V; \quad (29)$$

$$\delta_i^+ \delta_i^- = 0, \quad i \in V; \quad (30)$$

$$z_e, y_{ij} \in \{0, 1\} \quad e \in E, i \in V, j \in J. \quad (31)$$

$$\delta_i^+, \delta_i^- \geq 0, i \in V. \quad (32)$$

Целевая функция (22) выражает суммарный дефицит ресурса в компонентах связности сети, а найденное оптимальное значение функции (22) является верхней границей для целевой функции (1). Причиной тому служит тот факт, что найденное оптимальное значение выражает величину ущерба в худшем сценарии разрушения сети при плане защиты, заданном вектором  $\mathbf{x}^*$ . То есть представляет собой значение целевой функции (1) на некотором допустимом решении задачи (1)–(11).

Обратим внимание на уравнение (29), в котором величина дефицита в вершине  $i \in V$  выражается в виде разности двух неотрицательных переменных  $\delta_i^+$  и  $\delta_i^-$ . Ограничения (30) гарантируют, что лишь одна из этих переменных может принимать ненулевое значение. Данные ограничения являются квадратичными, что переводит вспомогательную задачу в класс смешанно-целочисленных задач с квадратичными ограничениями. Наиболее современные версии программных пакетов для решения задач математического программирования способны эффективно решать такого сорта задачи [13].

В качестве альтернативы ограничениям (30) можно рассмотреть их переформулировку в виде двух наборов линейных ограничений, использующих вспомогательные булевы переменные  $\Delta_i, i \in I$ .

$$\delta_i^- \leq (n - 1)M^+ \Delta_i, \quad i \in V; \quad (33)$$

$$\delta_i^+ \leq M^+(1 - \Delta_i), \quad i \in V. \quad (34)$$

Неравенства (33) требуют использования большой константы  $(n - 1)M^+$ , поскольку вычитаемая сумма в левой части (29) может содержать до  $n - 1$  ненулевого слагаемого, каждое из которых равно  $M^+$ . Введение дополнительных переменных  $w_i, i \in V$ , равных нулю в случае, если вершина  $i$  является вершиной с наименьшим индексом в своей компоненте связности, и единице в противном случае, позволяет переписать (29) следующим образом:

$$\sum_{j \in V} d_j y_{ij} - M^+ w_i = \delta_i^+ - \delta_i^-, \quad i \in V; \quad (35)$$

$$w_i \geq 1 - \sum_{s \in V | s < i} y_{is}, \quad i \in V; \quad (36)$$

При этом при линейризации (30) в (33) достаточно значения константы  $M = M^+ + M^-$ .

Решение  $\mathbf{z}^* = (z_e^*)$  может быть добавлено ко множеству  $\mathcal{Z}'$ , после чего процедура возвращается к решению задачи (16)–(21). Значение целевой функции (22) равно значению  $f(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$  и может использоваться в ограничении (17). Процедура завершается, когда вычисленные значения верхней и нижней границ равны.

**3.2. Накопление компонент связности графа.** Для подмножества вершин  $V' \subset V$  через  $C(V')$  обозначим множество ребер разреза, задаваемого  $V'$ . Формально  $C(V') = \{(i, j) \in E \mid |\{i, j\} \cap V'| = 1\}$ .

Верно следующее

**Утверждение 2.** Для любого  $(0, 1)$ -вектора  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющего (14), верно

$$\max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z}')} D(V') \prod_{e \in C(V')} (1 - x_e), \quad \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}'.$$

**Доказательство.** Для заданного  $\mathbf{x}$  рассмотрим  $\mathbf{z}^* = \arg \max f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , произвольный  $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}'$  и новый вектор  $\mathbf{z}'' = (z_e'')$ , который определим следующим образом. Для каждого  $V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z}')$  такого, что  $\prod_{e \in C(V')} (1 - x_e) = 1$ , положим  $z_e'' = 1$ . Для всех других  $e \in E$  положим  $z_e'' = 0$ . По построению  $z_e' \geq z_e''$  для всех  $e \in E$ , следовательно  $\mathbf{z}''$  удовлетворяет (3). Кроме того также по построению для всех  $e \in E$  выполняется  $x_e + z_e'' \leq 1$ . Отсюда имеем

$$\max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{z}'') = \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z}'')} D(V') = \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z}')} D(V') \prod_{e \in C(V')} (1 - x_e).$$

Что и требовалось доказать

Для  $V' \subseteq V$  введем дополнительную переменную  $v_{V'}$ , равную единице, если среди ребер множества  $C(V')$  нет защищенных, и нулю в противном случае. Условия, налагаемые на значения переменной  $v_{V'}$ ,  $V' \subseteq V$ , может быть записано в виде следующего неравенства:

$$v_{V'} \geq 1 - \sum_{e \in C(V')} x_e.$$

Заметим, что в случае, когда правая часть неравенства неположительна, значение  $v_{V'} = 0$  становится допустимым в смысле данного неравенства, и будет выбрано в силу оптимизационных целей.

Нижняя оценка, получаемая при решении задачи (16)–(21), таким образом может быть усилена путем решения следующей задачи, использующей введенные переменные:

$$LB = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{v}, w} w \quad (37)$$

$$w \geq \sum_{V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z}')} D(V')v_{V'}, \quad \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}'; \quad (38)$$

$$v_{V'} \geq 1 - \sum_{e \in C(V')} x_e, \quad \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}', V' \in \mathcal{V}(\mathbf{z}'); \quad (39)$$

$$\sum_{e \in E} a_e x_e \leq A; \quad (40)$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \quad e \in E. \quad (41)$$

$$w, v_{V'} \geq 0, \quad V' \subseteq V. \quad (42)$$

Аналогично схеме из подраздела 3.1 вектор  $\mathbf{x}^*$ , найденный при решении задачи (37)–(42) может быть использован для вычисления верхней границы для целевой функции (1) в задаче (22)–(32) или одной из ее эквивалентных переформулировок.

Заметим, что процедуры поиска оптимального решения задачи (1)–(11), предложенные в разделе 3 гарантированно достигают критерия остановки и завершают вычисления за конечное время. В этом легко убедиться, заметив, что повторного добавления одного и того же вектора  $\mathbf{z}'$  во множество  $\mathcal{Z}'$  не происходит, так как при этом найденные значения верхней и нижней границ будут равны. Оптимальность допустимого решения, построенного при вычислении верхней границы, будет при этом доказана. В силу конечности числа различных значений  $\mathbf{z}'$  получаем требуемое.

#### 4. Результаты численных экспериментов

В численных экспериментах мы будем преследовать две цели. В первую очередь нас интересует влияние выбора формулировок задач вычисления нижней и верхней границы на время нахождения оптимального решения защитника и доказательства его оптимальности. Также в данном разделе мы рассмотрим вопросы практического использования модели планирования защиты сети снабжения для анализа ее уязвимостей.

Для вычислений используется рабочая станция с двумя шестиядерными процессорами Intel Xeon X5675 3.07 ГГц с 32 Гб ОЗУ под управлением ОС Windows Server 2008 R2. Процедуры генерации отсечений

реализованы на языке программирования C#. Для решения смешанно-целочисленных линейных и квадратичных задач математического программирования используется пакет Gurobi 9.0.1 [13].

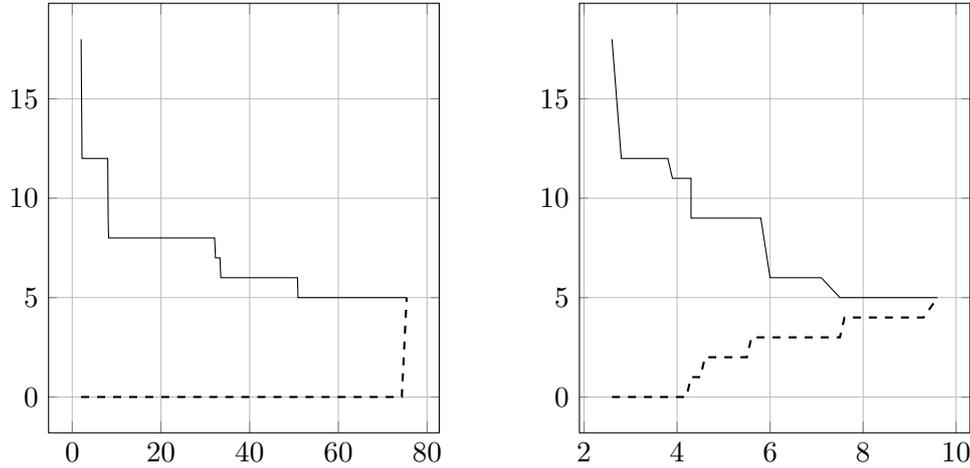
**4.1. Сравнение формулировок для вычисления LB.** В разделе 3 предложены два подхода для вычисления величины LB, являющейся нижней границей для оптимального значения целевой функции (1). В первой серии экспериментов нас будет интересовать влияние выбора процедуры вычисления LB на скорость сходимости метода генерации отсечений. На данном этапе выбор можно проводить без конкретизации способа вычисления верхней границы, UB, которому мы посвятим следующую серию экспериментов.

В качестве входных данных будем использовать случайно сгенерированные сети снабжения, построенные следующим образом. Для заданного числа  $m$  строится дерево с  $m$  вершинами. Построение начинается с тривиального дерева, состоящего из одной вершины. Далее на каждом шаге добавляется одна вершина, которая присоединяется ребром к случайно выбранной вершине уже имеющегося дерева. Когда дерево построено, к нему добавляется не более  $\bar{n}$  ребер. Для этого  $\bar{n}$  случайным образом выбирается пара вершин, которые соединяются ребром в случае, если на данный момент между ними нет ребер. В противном случае никаких изменений не происходит, и осуществляется следующая попытка добавления ребра. Таким образом, по окончании процедуры имеем сеть с  $m$  вершинами и  $n \leq m + \bar{n} - 1$  ребрами. Для каждой вершины  $v \in V$  величина баланса  $d_v$  выбирается равномерно из целочисленного диапазона  $\{-5, -4, \dots, 5\}$ . Затраты  $a_e$  и  $b_e$  на, соответственно, защиту и разрушение ребра  $e$  полагаем равными единице для всех  $e \in E$ .

На рис. 1 представлены графики динамики изменения значений UB и LB для примера с  $m = 15$  вершинами и  $n = 20$  ребрами. Бюджеты защитника и нападающего равны  $A = B = 7$ . По горизонтальной оси отложено время работы алгоритма в секундах. Для алгоритма с процедурой LB, основанной на накоплении стратегий нападающего (график слева), на данном примере оно составило 75 секунд. В случае использования формулировки, основанной на накоплении компонент связности (график справа), нахождение оптимального решения и доказательство его неулучшаемости потребовало 9 секунд. Общее число затраченных итераций, то есть число решенных пар задач, вычисляющих нижнюю и верхнюю границы оптимального значения целевой функции (1), в первом случае равно 627, а во втором — 53.

Следует заметить, что подобная картина в целом ожидаема и является характерной для проведенных нами тестов. А именно, число проведенных итераций, а также время работы в случае накопления компонент

Рис. 1. Динамика изменения величин UB (сплошная ломаная) и LB (пунктирная ломаная) в зависимости от времени счета в секундах (по горизонтальной оси). Слева — подход с накоплением стратегий нападающего, справа — с накоплением компонент связности.



связности графа оказывается значительно меньшим. Использование такого подхода позволяет быстрее накапливать информацию об уязвимостях сети снабжения внутри модели вычисления нижней границы. Это значительно ускоряет получение нетривиальных значений нижней границы, а также нахождение качественных векторов  $x$  для последующего вычисления верхней границы.

**4.2. Сравнение формулировок для вычисления UB.** В экспериментах данного подраздела мы займемся исследованием эффективности формулировок задач для вычисления верхних границ. Сравнение будем производить на основе усредненных показателей по времени вычисления на сериях примеров различной размерности.

Для тестов будем использовать примеры, сгенерированные по правилу, описанному в подразделе 4.1 с числом вершин  $m = 10, 15, 20, 25, 30$  и соответствующим ему числом ребер  $\bar{n} = 15, 22, 30, 37, 45$ . Ресурсы сторон полагаем равными  $A = B = 5$ , а затраты на защиту/разрушение ребер  $a_e = b_e = 1$  для всех  $e \in E$ . Для каждой из пяти размерностей сгенерирована серия из 20 примеров В таблице 1 представлены следующие величины:

$W_q, W_l$  и  $W_{lm}$  — число примеров данной размерности, для которых, соответственно, квадратичная, линейная и модифицированная линейная формулировка оказалась не медленнее остальных (из 20 возможных);  $T_q, T_l$  и  $T_{lm}$  — среднее время решения примера данной размерности для,

Таблица 1

Сравнение эффективности процедур вычисления верхней границы

$m$	$\bar{n}$	$W_q$	$W_l$	$W_{lm}$	$T_q$	$T_l$	$T_{lm}$
10	15	9	6	6	227	206	207
15	22	6	10	4	881	843	949
20	30	8	11	1	3509	3593	4025
25	37	5	9	6	13799	13630	14265
30	45	4	10	6	52368	48697	53259
10	15	12	10	6	14	14	16
15	22	9	6	5	154	153	169
20	30	6	9	5	730	669	737
25	37	7	7	6	3413	3364	3530
30	45	4	10	6	13953	13276	13686

соответственно, квадратичной, линейной и модифицированной линейной формулировки, в миллисекундах. Верхняя часть таблицы представляет результаты для примеров, не содержащих защищенных ребер. В нижней части таблицы для каждого примера дополнительно случайным образом генерировалось решение по защите ребер, использующее защитный бюджет  $A = 5$  целиком. Исходя из данных таблицы, заключаем, что в целом рассмотренные формулировки задачи вычисления верхней границы демонстрируют схожую эффективность. Анализ информации, выдаваемой процедурой ветвей и отсечений пакета Gurobi показывает, что для формулировок характерен крайне значительный разрыв целочисленности. Для многих рассмотренных примеров он превышает 1000%, что и является ключевым фактором, определяющим время работы метода.

**4.3. Использование модели.** В качестве демонстрации сценариев применения модели рассмотрим пример сети с 11 вершинами, изображенной на рис. 2. Интенсивность закрашивания вершины соответствует знаку величины баланса ресурса  $d_j$  в данной вершине: в белых вершинах баланс отрицательный, в светло-серых нулевой, а в темно-серых положительный. Само значение баланса в вершине представлено числом возле нее. Как и ранее, полагаем  $a_e = b_e = 1$  для всех  $e \in E$ .

На рис. 3 слева приведена таблица значений дефицита, соответствующего оптимальному решению задачи защитника с различными значениями параметров  $A$  и  $B$ . Видим, что в отсутствие защиты ребер разрушение двух из них может привести к возникновению суммарного дефицита в 3 единицы. При этом для организации защиты сети, не допускающей возникновения дефицита при разрушении любого количества ребер вплоть до восьми, необходим объем защитного бюджета не менее  $A = 7$ .

Рис. 2. Пример сети снабжения

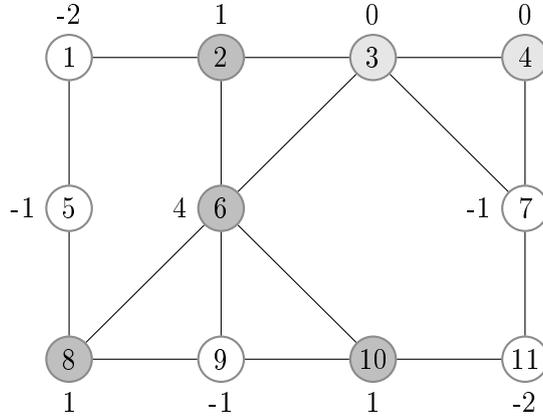


Рис. 3. Значения минимального дефицита в сети, изображенной на рис. 2 (слева) и в этой же сети с дополнительным ребром (6,11) (справа).

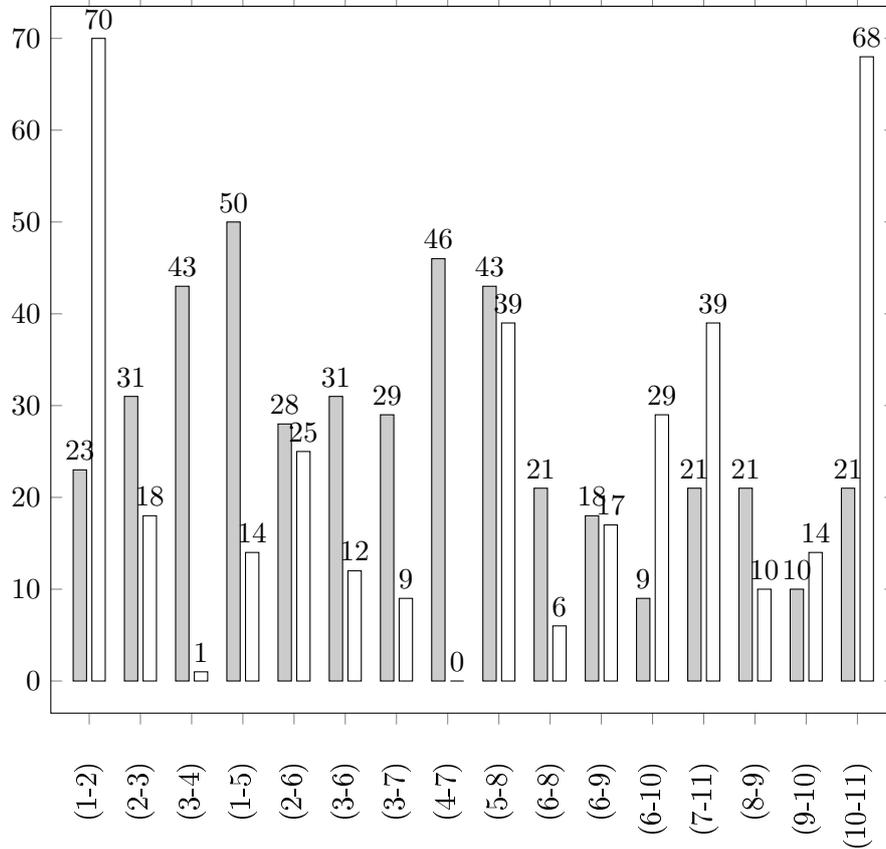
		B							
		1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	3	3	5	6	6	6	7
	1	0	2	3	3	4	5	6	6
	2	0	1	2	3	4	4	4	5
	3	0	0	1	2	3	3	4	4
	4	0	0	1	1	2	2	2	3
	5	0	0	1	1	1	2	2	2
	6	0	0	0	0	1	1	1	1
	7	0	0	0	0	0	0	0	0

		B							
		1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	3	3	3	5	6	6	6
	1	0	1	2	3	4	4	4	5
	2	0	0	2	3	3	3	4	4
	3	0	0	1	1	2	2	2	3
	4	0	0	1	1	1	2	2	2
	5	0	0	0	1	1	1	1	1
	6	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	0

Рассмотрим вопрос о целесообразности организации дополнительной связи между вершиной 6 с высоким уровнем дефицита ресурса и вершиной 11, в которой имеется избыток ресурса. Справа на рис. 3 представлена таблица значений суммарного дефицита при различных соотношениях величин  $A$  и  $B$  для сети с добавленным ребром (6, 11). Сравнение таблиц показывает, что введение дополнительной связи позволяет сократить защитный бюджет  $A$  на одну единицу при сохранении прежних показателей эффективности его использования. Заметим, однако, что данные показатели следует учитывать с оговоркой о том, в общем случае оптимальный способ расходования защитного бюджета индивидуален для каждой конкретной пары значений  $A$  и  $B$ .

Для каждой пары значений  $A$  и  $B$ , где  $A \in \{0, \dots, 7\}$ , а  $B \in \{1, \dots, 8\}$  зафиксируем, какие ребра защищены в оптимальном плане защиты, и

Рис. 4. Доля пар  $(A, B)$  (из 64), для которых указанное ребро разрушено (серый столбец) и защищено (белый столбец), в процентах.



какие ребра при этом оказываются разрушенными в оптимальном решении атакующего. На рис. 4 приведена обобщенная информация о таких ребрах по всем 64 парам значений  $(A, B)$ . Обратим внимание на то, что наиболее важными для защиты оказываются ребра (1-2), (10-11), (5-8) и (7-11), соединяющие вершины, в которых дефицит ресурса отрицателен, с более полносвязными фрагментами сети.

Дополнительный анализ возможно провести, рассматривая значения, представленные в таблице 2. Она содержит характеристики вершин, вычисленные после отыскания оптимального решения задачи планирования защиты для всех рассматриваемых пар  $(A, B)$ . Для значений  $(A, B)$ , при которых заданная вершина оказывается в компоненте связности с положительным дефицитом ресурса, в таблице даны следующие значения:

Таблица 2

Обобщенные характеристики вершин для 64 пар значений  $(A, B)$ :  $N$  — число попаданий в компоненту связности с дефицитом ресурса;  $D_{avg}$  — среднее значение дефицита в дефицитной компоненте связности;  $S_{avg}$  — среднее число вершин в дефицитной компоненте связности.

$v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$N$	17	32	24	16	10	42	15	37	32	38	25
$D_{avg}$	2.0	2.6	2.8	2.7	2.1	3.0	1.6	3.0	2.9	2.9	2
$S_{avg}$	7.9	6.3	7.8	8.4	7.6	6.7	8.5	6.6	7.1	7.1	7.5

$N$  — общее количество таких пар;

$D_{avg}$  — среднее значение дефицита ресурса в компоненте связности, содержащей данную вершину;

$S_{avg}$  — средний размер компоненты связности, содержащей данную вершину.

Из данных таблицы видим, что вершины  $v \in V$ , для которых  $d_v < 0$ , реже оказываются в дефицитных компонентах связности. Исключением выступает  $v = 9$ , находящаяся среди дефицитных вершин, соединенных большим числом связей. Обратим внимание на величины  $S_{avg}$ , показывающие, что в среднем дефицитные компоненты содержат более половины вершин. Это свидетельствует о том, что наибольший ущерб данной сети приносят сценарии разрушения, при которых происходит изоляция вершин с избытком ресурса. Действительно, они располагаются на периферии и не имеют большого числа связей. Поэтому во многих случаях эти вершины не попадают в дефицитные компоненты связности, что и определяет более низкие значения  $N$  для таких вершин.

## 5. Заключение

В работе предложена модель составления плана защиты сети снабжения, минимизирующего суммарный дефицит ресурса, возникающий при разрушении некоторых путей его передачи. Модель может быть записана в виде минимаксной задачи смешанно-целочисленного программирования. Для отыскания оптимального решения в рамках данной модели предложены модификации схемы генерации отсечений, основанные на последовательном накоплении стратегий нападающей стороны, а также на накоплении компонент связности графа, образующихся при разрушении части ребер.

В численных экспериментах проведено сравнение предложенных модификаций между собой. Результаты показывают значительное превосходство схемы генерации отсечений, накапливающей компоненты связности графа. При этом рассмотренные формулировки задачи нападающего демонстрируют схожую производительность и обладают общим недостатком — высоким разрывом целочисленности. Поиск путей устранения данного недостатка будет являться одним из дальнейших направлений исследований.

Среди применений модели в работе продемонстрированы подходы к анализу уязвимости конкретной сети, а также оценке возможных ее модификаций с точки зрения влияния на такую уязвимость. Результаты проведенных вычислений позволяют количественно характеризовать влияние разрушения сети на ее элементы в худшем случае. Для ребер удастся определить их важность, а для вершин оценить объемы возникающего дефицита ресурса. Модель также дает возможность исследования соотношений защитного и атакующего бюджетов в терминах суммарного дефицита.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Grötschel M., Monma C.L., Stoer M.** Chapter 10. design of survivable networks //Handbooks in Operations Research and Management Science, 1995, Vol. 7, P. 617–672.
2. **Callaway D. S., Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J.** Network robustness and fragility: Percolation on random graphs //Phys. Rev. Lett., 2000, Vol. 85, P. 5468-5471.
3. **Nagurney A., Qiang Q.** Fragile Networks: Identifying Vulnerabilities and Synergies in an Uncertain World. 2009, Wiley.
4. **Brown G., Carlyle M., Salmerón J., and Wood K.** Defending critical infrastructure //Interfaces, 2006, Vol. 36, No. 6, P. 530–544.
5. **Scaparra M. P., Church R. L.** A bilevel mixed-integer program for critical infrastructure protection planning //Comp. Oper. Res., 2008, Vol. 35, P. 1905–1923.
6. **Golden B.** A problem in network interdiction //Naval Research Logistics Quarterly, 1978, Vol. 25, No. 4, P. 711–713.
7. **Wood R. K.** Deterministic network interdiction //Mathematical and Computer Modelling, 1993, Vol. 17, No. 2, P. 1–18.
8. **Sadeghi S., Seifi A., Azizi E.** Trilevel shortest path network interdiction with partial fortification //Comput. Ind. Eng., 2017, Vol. 106, P. 400–411.
9. **Dong Li, Xu Chen Lv, Xiang Tao Yan, Fei Wang.** A model for allocating protection resources in military logistics distribution system based on maximal covering problem //Int. Conf. Logist. Syst. Intell. Manag. ICLSIM, 2010, Vol. 1, P. 98–101.
10. **Alekseeva E., Kochetov. Y.** Matheuristics and exact methods for the

---

discrete  $(r|p)$ -centroid problem // Metaheuristics for bi-level optimization. Springer, Berlin, 2013, P. 189-219.

11. **Roboredo M. C. , Aizemberg L., Pessoa A. A.** An exact approach for the  $r$ -interdiction covering problem with fortification, //Cent. Eur. J. Oper. Res., 2017, P. 1–21.
12. **Roboredo M. C., Pessoa A. A.** A branch-and-cut algorithm for the discrete  $(r|p)$ -centroid problem //Eur. J. Oper. Res., 2013, Vol. 224, No. 1, P. 101–109.
13. Inc. Gurobi Optimization. Gurobi optimizer reference manual, 2020. <https://www.gurobi.com/documentation/9.0/refman/index.html>