ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
******** 2000. Том 55, № 10. С. 3–14

УДК 519.8

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ *)

А. В. Еремеев[1,2]
[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия,
[2] Омский гос. университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55А, 644077 Омск, Россия

*

Аннотация. Рассматривается задача синтеза фазированной антенной решетки, которая заключается в выборе фаз и амплитуд для всех излучающих элементов, когда требуется, чтобы получаемая диаграмма направленности по каждому рассматриваемому направлению принадлежала заданному множеству. Установлено, что поиск допустимого решения является NP-трудной в сильном смысле задачей в случае, когда по каждому рассматриваемому направлению допускается одно или два значения мощности излучения. Кроме того, доказана NP-трудность поиска допустимого решения в задаче синтеза частично заполненной антенной решетки, когда требуется чтобы получаемая диаграмма направленности по каждому рассматриваемому направлению принадлежала заданному интервалу и амплитуды всех излучателей были одинаковы. Библиогр. 18.

Ключевые слова: Вычислительная сложность, антенная решетка, сводимость, NP-полнота.

Введение

Фазированная антенная решетка (ФАР) представляет собой совокупность излучателей, подключенных к устройствам, обеспечивающим требуемое распределение фаз и амплитуд на этих излучателях. ФАР широко используются в диапазоне сверхвысоких частот для получения излучения с заданной диаграммой направленности (см., например, [6]). В

*)Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0020).

*

диапазоне высоких частот, который соответствует коротким волнам, такие системы позволяют получить увеличение энергии канала связи или сокращение занимаемого пространства [9, 14].

Задача синтеза ФАР заключается в выборе фаз и амплитуд для всех излучающих элементов, когда требуется, чтобы получаемая диаграмма направленности по каждому из рассматриваемых направлений принадлежала заданному множеству. В некоторых формулировках задачу синтеза ФАР удается решить с использованием методов выпуклого программирования [2, 3] или методов линейной алгебры [15, 16]. В частности, в [8] показано, что задачей выпуклого программирования является отыскание возбуждений заданного набора произвольно расположенных источников таким образом, чтобы создать интенсивность дальнего поля, которая максимальна в заданном направлении и подчиняется произвольным верхним границам в других направлениях. Однако, многие авторы вынуждены использовать более трудоемкие методы, разработанные для решения многоэкстремальных задач, такие как мультистарт градиентной оптимизации [7, 18], метаэвристики [1, 13], методы, основанные на полуопределенной релаксации [4] и т. д.

В настоящей работе доказывается NP-трудность в сильном смысле для двух вариантов задачи синтеза ФАР. Первый вариант соответствует постановке из [4], но имеет специфические требования к диаграмме направленности. Второй вариант предполагает синтез фаз в излучателях частично заполненной решетки с более реалистичными требованиями относительно диаграммы направленности. Свойства NP-трудности вытекают из полученных в теоремах 1 и 2 свойств NP-полноты соответствующих задач распознавания свойств, сформулированных в разделах 1. и 2.

1. Задача синтеза фазированной антенной решетки

Рассмотрим ФАР, состоящую из N излучающих элементов, размещенных в точках $\mathbf{r}_k$, $k = 1, \dots, N$ из $\mathbb{R}^3$. Для упрощения обозначений задача описана в случае, когда диаграмма направленности параметризована только значениями полярного угла θ в фиксированной азимутальной плоскости, которая опущена в обозначениях. Обобщение на случай, когда диаграмма направленности задается как по азимутальному, так и по полярному угловому направлению, существенно не усложнит задачу. Пусть каждый элемент k создает парциальное поле $g_k(\theta)$ в направлении θ, т.е. $g_k(\theta)$ – напряженность электромагнитного поля, создаваемого в направлении θ на большом расстоянии (т.е. когда размеры ФАР пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до приемника) при протекании единичного тока через излучающий элемент k. На большом расстоянии напряженность поля $f(\theta)$, излучаемого всей ФАР в направлении θ, тогда имеет вид (см., например, [4], или подробнее в §1.13 [19])

$$f(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{w}, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{a}(\theta) = (g_1(\theta)e^{2\pi j\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}(\theta)\rangle/\lambda}, \ldots, g_N(\theta)e^{2\pi j\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{r}(\theta)\rangle/\lambda})^H, \tag{2}$$

λ – длина волны, j – мнимая единица, $\langle\cdot\rangle$ – скалярное произведение, $\mathbf{w}$ – комплексный вектор возбуждения, определяющий как амплитуду тока $|w_k|$, так и его фазу $\mathrm{Arg}(w_k)$ в кажом излучателе k. Наконец, $\mathbf{r}(\theta)$ – единичный вектор в направлении θ, а верхний индекс ^{H} обозначает эрмитову транспозицию вектора. Введем обозначения $\mathbf{a}_i := \mathbf{a}(\theta_i)$, $f_i := f(\theta_i) = \mathbf{a}_i^H \mathbf{w}$, $\mathbf{x} = (Re(\mathbf{w}), Im(\mathbf{w}))^T \in \mathbb{R}^{2N\times 1}$, и

$$\mathbf{A}_i = \left(\begin{array}{c|c} Re(\mathbf{a}_i^T) & -Im(\mathbf{a}_i^T) \\ \hline Im(\mathbf{a}_i^T) & Re(\mathbf{a}_i^T) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a_i^{(11)} & \ldots & a_i^{(1,2N)} \\ a_i^{(21)} & \ldots & a_i^{(2,2N)} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2N},$$

где ^{T} обозначает транспонирование. Вещественнозначная версия (1),(2) для напряженности поля в направлении θ_i тогда имеет вид (подробнее см., например, п. 2.1 в [18]):

$$(Re(f_i), Im(f_i))^T = \mathbf{A}_i \mathbf{x}. \tag{3}$$

Мощность, излучаемая ФАР в направлении θ_i, равна

$$|f_i|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}, \quad \text{где} \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i. \tag{4}$$

Задача синтеза ФАР (см., например, [4]) сводится к поиску вектора возбуждений $\mathbf{x}$ такого, что для всех направлений $i = 1, \ldots, I$, мощность $|f_i|^2$, излучаемая решеткой в направлении i, принадлежит заданному подмножеству $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}$.

Эта задача полагалась NP трудной в [4] без строгого доказательства. Очевидно, что она не проще, чем следующая задача распознавания свойств (назовем ее *распознавательным вариантом дискретной задачи синтеза ФАР*): дано I целочисленных $2 \times 2N$-матриц $\mathbf{A}_i$, $i = 1, \ldots, I$, и $2I$ целочисленных значений α_i, β_i, $i = 1, \ldots, I$, где $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, I$. Существует ли вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$, такой что

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{x} \in \{\alpha_i, \beta_i\}, \quad i = 1, \ldots, I\ ? \tag{5}$$

Теорема 1. *Распознавательный вариант дискретной задачи синтеза ФАР является NP-полной в сильном смысле задачей.*

Перед доказательством теоремы получим следующую техническую лемму, которая предполагает определенную координацию (синхронизацию) возбуждений в элементах $k = 1, \dots, N-1$ с элементом N.

Лемма 1. *Если $N \geqslant 3$ и система ограничений содержит следующие три блока ограничений*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x} = x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\} \quad \text{при} \quad k < N, \tag{6}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{x} = x_N^2 + x_{2N}^2 = 1, \tag{7}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_4 \mathbf{x} = 4x_k^2 + 4x_{N+k}^2 + x_N^2 + x_{2N}^2 + 4x_k x_N + 4x_{N+k} x_{2N} = 1, \quad \text{при} \quad k < N, \tag{8}$$

тогда перекрестные произведения для любых $k, \ell < N$ удовлетворяют следующему условию:

$$x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} \ = \ \begin{cases} 1, \text{ если } x_k^2 + x_{N+k}^2 = x_\ell^2 + x_{N+\ell}^2 = 1, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство леммы 1. Очевидно, что в случае $x_k^2 + x_{N+k}^2 = 0$ или $x_\ell^2 + x_{N+\ell}^2 = 0$, мы немедленно получаем $x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} = 0$, что удовлетворяет (9).

Рассмотрим случай $x_k^2 + x_{N+k}^2 = x_\ell^2 + x_{N+\ell}^2 = 1$. Тогда условие (8) означает, что

$$x_k x_N + x_{N+k} x_{2N} = -1. \tag{10}$$

Легко видеть, что при условии $x_k^2 + x_{N+k}^2 = x_N^2 + x_{2N}^2 = 1$, минимум выражения $x_k x_N + x_{N+k} x_{2N}$ равен -1, и он достигается тогда и только тогда, когда $x_k = -x_N$, $x_{N+k} = -x_{2N}$. Как раз этого и требует условие (10) для всех $k < N$. Поэтому в рассматриваемом случае $x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} = x_N^2 + x_{2N}^2 = 1$, где последнее равенство следует из условия (7). Лемма доказана.

Как видно из этой леммы, ограничения (8) обеспечивают согласование фаз во всех излучающих элементах, где $k < N$, с фазой в элементе N, которая может быть произвольной.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что распознавательный вариант дискретной задачи синтеза ФАР принадлежит классу NP. Мы сведем следующую NP-полную в сильном смысле задачу

Независимое множество (см., например, [5]) к рассматриваемой здесь задаче распознавания.

Независимое множество: дан граф $G = (V, E)$ и положительное целое число K. Содержит ли этот граф подмножество вершин S мощности K такое, что все вершины этого подмножества попарно несмежны (т. е. S является независимым множеством).

Обозначим $n := |V|, m := |E|$ и предположим, что $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, а ребро с номером r, $r = 1, \dots, m$, имеет вид $e_r = v_{k(r)}v_{\ell(r)}$.

Для заданного графа G, т.е. примера задачи *Независимое множество*, построим пример распознавательной дискретной задачи синтеза ФАР следующим образом. Пусть $N = n+1$, и все N векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ вещественнозначны:

$$\mathbf{a}_1 := (1, 0, 0 \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{a}_2 := (0, 1, 0 \dots, 0)^T,$$

$$\dots$$

$$\mathbf{a}_N := (0, 0, \dots, 0, 1)^T.$$

Тогда для любого k, $k = 1, \dots, N$, матрица $\mathbf{A}_k$ состоит из нулевых элементов, за исключением $a_k^{(1,k)} = a_k^{(2,N+k)} = 1$.

Подмножества $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \dots, n$, задаются двумя допустимыми значениями излучаемой мощности $\alpha_k := 0, \beta_k := 1$. Таким образом, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_i$, где все элементы равны нулю, за исключением $q_k^{(kk)} = q_k^{(N+k,N+k)} = 1$ при $k = 1, \dots, n$. То есть первые n ограничений в системе (5) имеют вид

$$x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}, \quad k = 1 \dots, n. \tag{11}$$

Ограничения (11) задают альтернативу (0 или 1) для амплитуды возбуждения в излучаюших элементах $1, \dots, n$, что соответствует альтернативе в задаче *Независимое множество*: либо включить вершину v_k в набор S (когда $x_k^2 + x_{N+k}^2 = 1$), либо пропустить эту вершину (когда $x_k^2 + x_{N+k}^2 = 0$). Для последнего элемента ФАР фиксируем единичную амплитуду:

$$x_N^2 + x_{2N}^2 = 1, \tag{12}$$

поэтому $\mathcal{C}_N = \{1\}$. Этот элемент ФАР будет использоваться для координации фаз во всех других излучающих элементах в том же смысле, в каком элемент с номером N используется в лемме 1. С этой целью в каждом векторе $\mathbf{a}_{N+k}$, $k = 1, \dots, n$, положим действительную часть k-го компонента равной 2, а действительную часть компонента N положим равной 1. Остальные действительные и все мнимые части комплексного вектора $\mathbf{a}_{N+k}$ полагются равными 0. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$, матрица $\mathbf{A}_{N+k}$ состоит из нулевых элементов, за исключением $a_{N+k}^{(1k)} = a_{N+k}^{(2,N+k)} = 2$ и $a_{N+k}^{(1N)} = a_{N+k}^{(2,N)} = 1$. Подмножества $\mathcal{C}_{N+k},\ k = 1, \ldots, n$ состоят из одного элемента, равного 1: $\alpha_k = 1, \beta_k = 1$ для $k = N+1, \ldots, N+n$. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$, справедливо $\mathbf{Q}_{N+k} = \mathbf{A}_{N+k}^T \mathbf{A}_{N+k}$, где все элементы равны нулю, за исключением четырех элементов, соответствующих действительным частям: $q_{N+k}^{(kk)} = 4$, $q_{N+k}^{(N,N)} = 1$, $q_{N+k}^{(kN)} = 2$, $q_{N+k}^{(Nk)} = 2$ и четырех элементов, соответствующих мнимым частям $q_{N+k}^{(N+k,N+k)} = 4$, $q_{N+k}^{(2N,2N)} = 1$, $q_{N+k}^{(N+k,2N)} = 2$, $q_{N+k}^{(2N,N+k)} = 2$.

Следовательно, матрицы $\mathbf{Q}_{n+k}, k = 1, \ldots, n$, определяют ограничения

$$4x_k^2 + 4x_{N+k}^2 + x_N^2 + x_{2N}^2 + 4x_k x_N + 4x_{N+k}x_{2N} = 1, \tag{13}$$

где $k = 1. \ldots, n$. Заметим, что ввиду леммы 1, ограничения (13) вместе с ограничением (12) дают

$$x_k x_\ell + x_{N+k}x_{N+\ell} \in \{0, 1\} \ \text{ при } k = 1, \ldots, n,\ \ell = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Чтобы представть граф в терминах дискретной задачи синтеза ФАР, для каждого ребра $e_r, r = 1, \ldots, m$, мы устанавливаем равными 1 две действительные части компонент с индексами $k(r)$ и $\ell(r)$ в векторе $\mathbf{a}_{N+n+r}$, остальные действительные части $Re(\mathbf{a}_{N+n+r})$ полагаем равными нулю, как и все мнимые части, т. е. $Im(\mathbf{a}_{N+n+r}) = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Тогда для любого $r = 1, \ldots, m$, матрица $\mathbf{A}_{N+n+r}$ состоит из нулевых элементов, за исключением $a_{N+n+r}^{(1,k(r))} = a_{N+n+r}^{(1,\ell(r))} = a_{N+n+r}^{(2,N+k(r))} = a_{N+n+r}^{(2,N+\ell(r))} = 1$. Подмножества $\mathcal{C}_{N+n+r}$ снова состоят из двух элементов, нуля и единицы: $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$ для $i = N+n+1, \ldots, N+n+m$. Тогда для любого $r = 1, \ldots, m$, имеем $\mathbf{Q}_{N+n+r} = \mathbf{A}_{N+n+r}^T \mathbf{A}_{N+n+r}$, где все элементы равны нулю, за исключением четырех элементов, соответствующих действительным частям $q_{N+n+r}^{(k(r),\ell(r)} = q_{N+n+r}^{(\ell(r),\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(k(r),\ell(r)} = q_{N+n+r}^{(\ell(r),k(r))} = 1$ и четырех элементов, соответствующих мнимым частям

$$q_{N+n+r}^{(N+k(r),N+k(r)} = q_{N+n+r}^{(N+\ell(r),N+\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(N+k(r),N+\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(N+\ell(r),N+k(r))} = 1.$$

Следовательно, матрицы $\mathbf{Q}_{N+n+r}$, где $r = 1, \ldots, m$, определяют ограничения

$$x_{k(r)}^2 + x_{N+k(r)}^2 + x_{\ell(r)}^2 + x_{N+\ell(r)}^2 + 2x_{k(r)}x_{\ell(r)} + 2x_{N+k(r)}x_{N+\ell(r)} \in \{0, 1\}, \tag{15}$$

где $r = 1. \ldots, m$. Эти ограничения вместе с выражениями (14) показываают, что должно выполняться хотя бы одно из двух равенств:

$x^2_{k(r)} + x^2_{N+k(r)} = 0$, $x^2_{\ell(r)} + x^2_{N+\ell(r)} = 0$, что соответствует требованию того, чтобы оба конца ребра e_r не принадлежали одновременно множеству S.

Для подсчета количества излучающих элементов с единичной амплитудой возбуждения определим вектор $\mathbf{a}_I$, где $I = N + n + m + 1$

$$Re(\mathbf{a}_I) = (1, 1, \dots, 1, 0)^T,$$

$$Im(\mathbf{a}_I) = (0, 0, \dots, 0, 0)^T.$$

т.е.

$$\mathbf{A}_I = \begin{pmatrix} 1, \dots, 1, 0 & 0, \dots, 0, 0 \\ 0, \dots, 0, 0 & 1, \dots, 1, 0 \end{pmatrix}$$

и в $\mathbf{Q}_I = \mathbf{A}_I^T \mathbf{A}_I$ имеем $q_I^{(k\ell)} = q_I^{(N+k,N+\ell)} = 1$ для всех k, ℓ от 1 до n, остальные элементы в $\mathbf{Q}_I$ полагаются равными нулю.

Обозначим $M := \{k : x_k^2 + x_{N+k}^2 = 1\}$. Тогда

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_I \mathbf{x} = \sum_{k,\ell \in M} (x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell}) = |M|^2 \tag{16}$$

в силу леммы и определения множества M.

Наконец положим $\alpha_I = \beta_I = K^2$, т. е. последнее ограничение в задаче синтеза ФАР имеет вид

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_I \mathbf{x} = |K|^2. \tag{17}$$

С одной стороны, если этот экземпляр распознавательной дискретной задачи синтеза ФАР имеет допустимое решение, то из равенства (16) следует, что $|M| = K$, а множество вершин $S = \{v_i : i \in M\}$ является независимым множеством в графе G и имеет размер K. С другой стороны, если $|S| = K$ в задаче *Независимое множество*, то можно положить $x_k = 1$ для всех $k \leqslant n$, таких что $v_k \in S$, и для $k = n + 1$, а остальные компоненты вектора $\mathbf{x}$ установить равными нулю. Легко проверить, что все ограничения соответствующего экземпляра распознавательной дискретной задачи синтеза ФАР выполнены.

Следовательно, индивидуальная задача *Независимое множество* имеет положительный ответ тогда и только тогода, когда построенный нами пример имеет положительный ответ, и это построение выполнимо за полиномиальное время. Таким образом, распознавательный вариант дискретной задачи синтеза ФАР – NP-полная задача. Более того, эта задача является NP-полной в сильном смысле, поскольку числовые параметры построенного примера полиномиально ограничены от размера графа в исходной задаче *Независимое множество.* Теорема 1 доказана.

2. Интервальная задача синтеза фаз в частично заполненной антенной решетке

Как правило, излучатели ФАР располагаются некоторым регулярным образом с фиксированным шагом, например, на линии, в узлах прямоугольной решетки, в вершинах правильного многоугольника и т.п. Однако, в некоторых случаях могут использоваться и *прореженные ФАР,* в которых часть регулярных позиций не заполнена. Пусть далее $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ из $\mathbb{R}^3$ описывают расположение регулярных позиций. Прореженные ФАР, таким образом, имеют менее N излучателей, что выгодно снижает стоимость и взаимное влияние между элементами, но также невыгодно повышает излучаемую мощность в нежелаемых направлениях (см., например, [10], [19] §1.17). Прореженные ФАР, в которых все элементы имеют одинаковую мощность возбуждения, могут быть основаны на случайном расположении элементов (см., например, [11], [12], гл. 7) или специально выбранном подмножестве регулярных положений излучателей, например, с использованием разностных множеств [10, 17].

Некоторое снижение излучаемой мощности в нежелаемых направлениях может быть получено путем подачи неравных по амплитуде возбуждений на элементы антенны. Как отмечено в [10], недостаток этого подхода заключается в том, что усиление ФАР будет меньше, чем у решетки, в которой полная мощность прикладывается ко всем элементам, что также согласуется с результатами вычислительных экспериментов в [18], § 3.2. В связи с этим, в данном разделе мы рассмотрим задачу синтеза ФАР, где амплитуды возбуждения не подлежат оптимизации.

Задача состоит в выборе подмножества элементов из заданной ФАР, состоящей из N излучающих элементов, и в назначении фаз возбуждения выбранным элементам так, чтобы для всех направлений $i = 1, \dots, I$, мощность, излучаемая решеткой в направлении i, принадлежала соответствующему интервальному подмножеству $\mathcal{C}_i = [L_i, U_i] \subset \mathbb{R}$. Без потери общности можно предположить, что амплитуда в каждом элементе равна 1. Очевидно, что такая задача синтеза ФАР не будет проще следующей задачи распознавания свойств (назовем ее *распознавательным вариантом задачи синтеза частично заполненной ФАР*): дано I целочисленных $2 \times 2N$-матриц $\mathbf{A}_i,\ i = 1, \dots, I$, и $2I$ целочисленных значений $L_i, U_i,\ i = 1, \dots, I$, где $L_i \leqslant U_i,\ i = 1, \dots, I$. Существует ли вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$, такой, что

$$x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}, \quad k = 1. \dots, N, \tag{18}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{x} \in [L_i, U_i], \quad i = 1, \dots, I? \tag{19}$$

Условие (18) здесь подразумевает, что излучающий элемент создается на позиции k тогда и только тогда, когда $x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}$.

Заметим, что в отличие от распознавательного варианта дискретной задачи синтеза ФАР, сформулированная здесь задача требует чтобы излучаемая мощность в каждом направлении i, $i = 1, \ldots, I$, принадлежала непрерывному интервалу $[L_i, U_i]$, а не дискретному множеству $\{\alpha_i, \beta_i\}$. В этом смысле распознавательный вариант задачи синтеза частично заполненной ФАР имеет более реалистичную постановку.

Теорема 2. *Распознавательный вариант задачи синтеза частично заполненной ФАР является NP-полной в сильном смысле задачей.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, с той разницей что здесь при построении сводимости не требуются ограничения (11), т. к. они следуют из условия (18), содержащегося в формулировке задачи. Аналоги всех прочих ограничений (12), (13), (15) и (17) отличаются лишь тем, что в правой части они содержат интервалы $[L_i, U_i]$, где $L_i = \alpha_i$, $U_i = \beta_i$.

3. Заключение

С использованием эффективной сводимости известной NP-полной задачи *Независимое множество* показано, что поиск допустимого возбуждения ФАР является NP-трудной в сильном смысле задачей в случае, когда по каждому направлению допускается одно или два значения мощности излучения (теорема 1). Формально эта задача является частным случаем рассмотренной в [4] задачи синтеза ФАР. Однако, более реалистичной постановкой является другой частный случай, когда по каждому направлению задан непрерывный интервал для мощности излучения (интервальная постановка). Частный случай этой задачи, когда допустимые интервалы на излучаемую мощность представляют собой верхние границы, является эффективно разрешимым [8]. Предполагается, что дальнейшие исследования позволят уточнить границу, разделяющую труднорешаемые варианты задачи синтеза ФАР от эффективно разрешимых случаев.

В работе также рассмотрена модификация интервальной постановки задачи, когда в каждой известной позиции можно установить или не устанавливать излучающий элемент, амплитуды всех излучателей одинаковы, но фазы излучателей требуется найти. NP-трудность поиска допустимого решения для этой задачи следует из теоремы 2.

Благодарности

Автор благодарен А.С. Юркову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Akdagli, A., Guney, K.: Shaped-beam pattern synthesis of equally and unequally spaced linear antenna arrays using a modified tabu search algorithm. Microwave and Optical Technology Letters 36(1), 16–20 (2003)

2. Bucci, O., Caccavale, L., Isernia, T.: Optimal far-field focusing of uniformly spaced arrays subject to arbitrary upper bounds in nontarget directions. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 50(11), 1539–1554 (2002)

3. Echeveste, J.I., de Aza, M.A.G., Zapata, J.: Shaped beam synthesis of real antenna arrays via finite-element method, floquet modal analysis, and convex programming. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 64(4), 1279–1286 (2016)

4. Fuchs, B.: Application of convex relaxation to array synthesis problems. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 62(2), 634–640 (2014)

5. Garey, M., Johnson, D.: Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness. W.H. Freeman and Company (1979)

6. Hansen, R.C.: Phased array antennas, vol. 213. John Wiley & Sons (2009)

7. Indenbom, M., Izhutkin, V., Sharapov, A., Zonov, A.: Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters. DEStech Transactions on Computer Science and Engineering (optim) (2018)

8. Isernia, T., Di Iorio, P., Soldovieri, F.: An effective approach for the optimal focusing of array fields subject to arbitrary upper bounds. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 48(12), 1837–1847 (2000)

9. Kudzin, V.P., Lozovsky, V.N., Shlyk, N.I.: The compact linear antenna array system of the short-wave band consisting of “butterfly” radiators. In: 2013 IX Internatioal Conference on Antenna Theory and Techniques. pp. 252–253. IEEE (2013)

10. Leeper, D., C.: Thinned aperiodic antenna arrays with improved peak side lobe level control (Jan 31 1978), `https://patents.google.com/patent/US4071848A/en`, , U.S. Patent 4,071,848

11. Steinberg, B.D.: The peak sidelobe of the phased array having randomly located elements. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 20, 129–136 (1972)

12. Steinberg, B., D.: Principles of Aperture and Array System Design. John Wiley & Sons (1976)

13. Villegas, F.J.: Parallel genetic-algorithm optimization of shaped beam coverage areas using planar 2-D phased arrays. IEEE Transactions on Antennas and Propagation 55(6), 1745–1753 (2007)

14. Wilensky, R.: High-power, broad-bandwidth HF dipole curtain array with extensive vertical and azimuthal beam control. IEEE transactions on broadcasting 34(2), 201–209 (1988)

15. Yurkov, A.S.: Optimizatsiya vozbuzhdeniya peredayushih fazirovannyh antennyh reshotok dekametrovogo diapazona dlin voln. ONIIP, Omsk (2014), in Russian

16. Yurkov, A.S.: Directivity maximization of the short wave band phased antenna array. Tehnika radiosvyazi (2), 46–53 (2016), in Russian

17. Копилович, Л., Е., Содин, Л., Г.: Линейные не-эквидистантные антенны-решетки на базе разностных множеств. Радиотехника и электроника 39(10), 2059–2065 (1989)

18. Тюнин, Н., Н.: Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решеток. Дискретный анализ и исследование операций 28(3), 65–89 (2021)

19. Щелкунов, С., Фриис, Г.: Антенны (теория и практика). Советское радио (1955)

Еремеев Антон Валентинович

Статья поступила
** ** 20** г.

Исправленный вариант —
** ** 20** г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
******** 2000. Volume 55, No. 10. P. 3–14

UDC 519.8

ON COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF PHASED ANTENNA ARRAY SYNTHESIS PROBLEM

A. V. Eremeev[1,2]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
[2] Omsk State University n.a. F.M. Dostoevsky,
55A Mira avenue, 630077 Omsk, Russia

E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

Abstract. The problem of phased antenna array synthesis is considered, which consists of choosing phases and amplitudes for all radiating elements when it is required that the resulting radiation pattern in each direction under consideration belongs to a given set. It is established that the search for an admissible solution is a strongly NP-hard problem in the case when one or two radiation power values are allowed in each direction under consideration. In addition, the NP-hardness of finding an admissible solution in the problem of synthesis of thinned antenna array is proven in the case when radiation power should belong to a given interval for each direction under consideration and excitation amplitudes in all elements are identical. . Bibliogr. 18.

Keywords: Computational complexity, antenna array, reduction, NP-completeness

Anton V. Eremeev

Received
** ** 20**

Revised
** ** 20**